

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РФ»  
ВОЛГОГРАДСКИЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ

И. И. Кулагина

# ЗАДАЧНИК ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

*Практикум для бакалавров*



Волгоград, 2022

УДК 336(076.5)  
ББК 65.26в631я73  
К 90

Р е ц е н з е н т ы :

доктор технических наук, профессор *Н. П. Садовникова*,  
ФГБОУ ВО «ВГСПУ»;  
кандидат экономических наук, доцент *Е. Н. Малышева*,  
ВИУ – филиал ФГБОУ ВО РАНХиГС

**Кулагина, И. И.**

**К 90** **Задачник по финансовой математике:** практикум для бакалавров / И. И. Кулагина; Волгоградский институт управления – филиал ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы». – Волгоград: Изд-во Волгоградского института управления – филиала РАНХиГС, 2022. – Систем. требования: Процессор Intel® или AMD с частотой не менее 1.5 ГГц; Операционная система семейства Microsoft Windows или macOS; Оперативная память 2 Гб оперативной памяти; Adobe Reader 6.0. – Загл. с экрана. – 44 с.

Представленный практикум является продолжением пособия Основы финансовых вычислений: практикум. Рассматриваются вопросы финансовой математики в условиях неопределенности, в том числе портфельная теория и ценообразование деривативов. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами с подробными решениями.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.04.08 «Финансы и кредит».

ISBN 978-5-7786-0853-5

© Кулагина И. И., 2022  
© Волгоградский институт управления –  
филиал ФГБОУ ВО РАНХиГС РФ, 2022

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Тема 1. ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ: ОБЛИГАЦИИ И АКЦИИ.....</b>	<b>4</b>
Примеры решения задач.....	7
Практические задания по теме .....	11
<b>Тема 2. ПОРТФЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ.....</b>	<b>13</b>
Примеры решения задач.....	15
Практические задания по теме .....	20
<b>Тема 3. САРМ И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ.....</b>	<b>23</b>
Примеры решения задач.....	24
Практические задания по теме .....	29
<b>Тема 4. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ДЕРИВАТИВОВ .....</b>	<b>30</b>
Примеры решения задач.....	32
Практические задания по теме .....	35
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>38</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ .....</b>	<b>39</b>

## Тема 1

# ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ: ОБЛИГАЦИИ И АКЦИИ

Контракт для осуществления финансовой операции, закрепляющей права и обязательства сторон, называют *финансовым инструментом*.

Существуют первичные и производные финансовые инструменты. Первичные определяют права на активы, например, ценные бумаги – акции и облигации.

Производные финансовые инструменты содержат права и обязательства по выполнению predetermined действия по отношению к активу. Это опционы, форварды и фьючерсы.

Относительная характеристика эффективности инвестиций может трактоваться как доходность облигаций и акций. Показатели доходности делятся на две группы.

В случае длительного срока погашения рассматривают *доходность к погашению* – годовую ставку дохода при полной окупаемости вложений в акцию или облигацию при дисконтировании платежей.

Ко второй группе относятся текущая и среднегодовая доходности. Используют показатели второй группы в случае краткосрочных ценных бумаг. Эти показатели основаны на прямом сопоставлении прибыли и затрат.

*Облигации.* Облигации делятся на *бескупонные* и *купонные* в зависимости от типа погашения.

Курс облигации рассчитывается по формуле:

$$K = \frac{P}{N},$$

где  $N$  – номинальная стоимость облигации;

$P$  – рыночная цена (цена продажи) облигации.

Доходность покупки *краткосрочной* облигаций (до года) без выплаты процентов определяется как разница между номинальной стоимостью облигации и ее ценой:

$$D = N - P = N - K \times N = N \times (1 - K).$$

Доходность покупки такой облигации, с использованием эффективной ставки *простых* процентов  $i_{эф}$ , определяется из формулы:

$$i_{эф} = \frac{1-K}{K \cdot d} \times T.$$

где  $d/T$  – срок на который выпущена облигация.

При использовании для определения доходности покупки краткосрочной облигации ставки *сложных* процентов формула имеет вид:

$$i_{эф} = \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{T}{d}} - 1.$$

Доходность покупки облигаций *с выплатой процентов по купону в конце срока* складывается из двух частей: а) разница между номинальной стоимостью облигации и ее ценой; б) суммы начисленных процентов за весь период размещения средств в облигации.

$D = N - P + N \times (1 + j)^n - N$ , учитывая что:  $P = K \times N$ , получаем:

$$D = N \times [(1 + j)^n - K].$$

Эффективная годовая ставка сложных процентов  $i_{эф}$  рассчитывается по формуле:

$$i_{эф} = \frac{1+j}{(K)^{\frac{1}{n}}} - 1.$$

Среднегодовая доходность такой облигации определяется как отношение среднегодовой прибыли к затратам:

$$i_a = \frac{(1+j)^n - K}{Kn}.$$

Текущая годовая доходность *бессрочной облигаций с периодической выплатой процентов по купону* определяется как ставка дисконтирования для годовой вечной ренты:

$$i_t = \frac{Q}{P} = \frac{j}{K},$$

где  $Q = j \times N$  – это размер купона.

Доходность к погашению определяется как годовая эффективная ставка по формуле:

$$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{j}{k \cdot K}\right)^k - 1,$$

где  $k$  – число начислений купонов на протяжении года.

В случае облигации, приобретаемой по курсовой стоимости, с выплатой ежегодных купонов и погашением по номиналу в конце срока, доходность к погашению определяется из равенства:

$$K = j \times a_{n; i_{\text{эф}}} + (1 + i_{\text{эф}})^{-n},$$

где  $a_{n; i_{\text{эф}}}$  – множитель приведения ренты, которую образуют купонные вы-

платы:  $a_{n; i_{\text{эф}}} = \frac{1 - (1 + i_{\text{эф}})^{-n}}{i_{\text{эф}}}$ .

Если же начисление и выплата процентов по купонам происходит  $p$  раз в год, то доходность к погашению определяется из равенства:

$$K = \frac{j}{p} \times a_{np; i_{\text{эф}}/p} + \left(1 + \frac{i_{\text{эф}}}{p}\right)^{-np}.$$

Среднегодовая доходность такой облигации определяется формулой:

$$i_a = \frac{j + (1 - K)/n}{K}.$$

Определим будущую рыночную стоимость облигации при постоянной ставке дисконтирования. В этом случае в любой момент времени  $n$  (до погашения) стоимость облигации определяется из равенства:

$$P(r, n) = P(r, 0) \times (1 + r)^n,$$

где  $r$  – постоянная ставка дисконтирования;

$P(r, 0)$  – стоимость облигации на начало покупки.

А стоимость облигации на начало покупки определяется формулой:

$P(r, 0) = \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(1+r)^{n_k}}$  ( $C_k$  – размер  $k$ -го платежа,  $m$  – общее число платежей,  $n_k$  – срок  $k$ -го платежа).

Степень влияния изменения процентных ставок на цены облигаций характеризуется показателем средневзвешенной продолжительности потока платежей, или дюрацией (duration).

Акции. Покупая акцию, ее владелец инвестирует средства в предприятие и получает право, кроме возмещения капитала, на дивиденды.

Акции делятся на обыкновенные и привилегированные.

Курсовой стоимостью акции называют цену продажи ее на рынке. Эта стоимость – курс акции – определяется отношением ее рыночной стоимости к номиналу.

Рыночная стоимость и доходность акции с фиксированным доходом определяется также, как у облигаций.

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Пример 1.* Пусть приобретена купонная облигация по курсу 65 с купонной ставкой 7%. Срок погашения облигации – 3 года. Выплата процентов по купону предусмотрена в конце срока. Найдем доходность к погашению и среднегодовую доходность облигации при условии, что облигация выкупается по номиналу.

*Решение.* Согласно условию задачи  $K = 65\%$ ;  $n = 3$ ;  $j = 0,07$ .

Определим  $i_{эф}$  и  $i_a$ .

Доходность к погашению  $i_{эф}$ :

$$i_{эф} = \frac{1+0,07}{(0,65)^{\frac{1}{3}}} - 1 = 0,2352 = 23,52\%.$$

Среднегодовая доходность  $i_a$ :

$$i_a = \frac{(1 + 0,07)^3 - 0,65}{0,65 \times 3} = 0,2949 = 29,49\%$$

*Пример 2.* Бессрочная облигация с номиналом в 120000 руб. была куплена по курсу 80. Ежегодный купон – 9%, проценты выплачиваются ежеквартально. Определить доходности текущую годовую и к погашению облигации.

*Решение.* По условию задачи –  $K = 80\%$ ;  $j = 0,09$ ;  $k = 4$ .

Определим  $i_{эф}$  и  $i_t$ .

Текущая доходность  $i_t$ :

$$i_t = \frac{j}{K} = \frac{0,09}{0,80} = 0,1125 = 11,25\%$$

Доходность к погашению  $i_{эф}$ :

$$i_{эф} = \left(1 + \frac{j}{k \times K}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,09}{4 \times 0,8}\right)^4 - 1 = 0,1173 = 11,73\%$$

*Пример 3.* Предположим, что купонную облигация, срок погашения которой 3 года, продают с дисконтом 10%. Рассчитать текущую и среднегодовую доходность, а также доходность к погашению облигации, при условии выплаты купонов по ставке 7%. Номинал облигации 200 тыс. руб.

*Решение.* По условию задачи –  $N = 200$ ;  $P = 180$ ;  $j = 0.07$ ;  $n = 3$ .

Определим  $i_{эф}$ ,  $i_a$ ,  $i_t$ .

Найдем текущую доходность. Она определяется отношением купона  $j$  к стоимости приобретения  $P$ :

$$i_t = 7/180 = 0,0389 = 3,89\%$$

Для нахождения доходности к погашению  $i_{эф}$  воспользуемся финансовой функцией Эксель – ВСД(), которая считает внутреннюю ставку доходности для потоков денежных средств. Основой для расчетов станет уравнение:

$180 = 0,07 \times a_{3;i_{эф}} + 200(1 + i_{эф})^{-3}$ , согласно которому для функции ВСД() укажем поток платежей: -180, 14, 14, 214.

$$i_{эф} = \text{ВСД}(\{-180;14;14;214\}) = 11,10\%$$

Среднегодовую доходность  $i_a$  определим как отношение среднегодового дохода к затратам:

$$i_a = \frac{(200 \times 0,07 \times 3 + 200 \times 0,1)/3}{180} = 0,1148 = 11,48\%$$

*Пример 4.* Требуется определить курс акции, продаваемой по цене 130 руб. Номинал акции – 100 руб.

*Решение.* Согласно условию задачи  $N = 100$ ;  $P = 130$

Определим  $K$ :

$$K = 130/100 = 1,3 = 130\%.$$

Таким образом, курс акции равен 130 процентных пунктов.

*Пример 5.* Предположим, что акционерное общество зарегистрировало обыкновенные акции в количестве 5000 и продало акционерам 4000 акций. Некоторое время спустя 300 акций были выкуплены. Определим дивиденды по акции, если по результатам отчетного года решено в качестве дивидендов выплатить 18500 руб. прибыли.

*Решение.* По условию задачи – к концу отчетного года дивиденды должны быть распределены по  $4000 - 300 = 3700$  шт.

Следовательно:  $18500/3700 = 5$  руб.

*Пример 6.* Уставный капитал акционерного общества составляет 100000 руб. Обыкновенные акции зарегистрированы в количестве 9000 и привилегированные в количестве 1000 акций. Дивиденды по привилегированным акциям составляют 30%. Определим дивидендный доход по акциям, если по результатам отчетного года решено выплатить 48000 руб. прибыли.

*Решение.* По условию задачи стоимость одной акции:

$$N = 100000/(9000+1000) = 10 \text{ руб.}$$

Доход по привилегированной акции составит:  $D_{пр} = 10 \times 0,3 = 3$  руб.

Для выплаты дивидендов по обыкновенным акциям остается прибыль в размере:  $48000 - 3 \times 1000 = 45000$ .

Доход по обыкновенной акции составит:  $D_{об} = 45000/9000 = 5$  руб.

*Пример 7.* Рассчитать текущую и среднегодовую доходность, а также доходность к погашению акции, при условии выплаты дивидендов по ставке 10% по привилегированной акции номиналом 3000 руб., купленной 7 лет назад по цене 3500 руб. Сегодня эта акция продается по цене 3200 руб.

*Решение.* По условию задачи –  $N = 3$ ;  $P = 3,5$ ;  $C = 3,2$ ;  $j = 0,1$ ;  $n = 7$ .

Определим  $i_{эф}$ ,  $i_a$ ,  $i_t$ .

Среднегодовую доходность  $i_a$  определим как отношение среднегодового дохода к затратам:

$$i_a = \frac{(3 \times 0,1 \times 7 + 0,3) / 7}{3,5} = 0,0979 = 9,79\%$$

Найдем текущую доходность. Она определяется отношением купона  $j$  к стоимости приобретения  $P$ :

$$i_t = 0,1 / 3,5 = 0,0286 = 2,86\%$$

Для нахождения доходности к погашению  $i_{эф}$  воспользуемся финансовой функцией Эксель – ВСД(), которая считает внутреннюю ставку доходности для потоков денежных средств. Основой для расчетов станет уравнение:

$3,5 = 0,1 \times 3 \times a_{7; i_{эф}} + 3,2(1 + i_{эф})^{-7}$ , согласно которому для функции ВСД() укажем поток платежей:  $\{-3,5; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; (0,3+3,2)\}$ .

$$i_{эф} = \text{ВСД}(\{-3,5; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; 3,5\}) = 7,60\%$$

*Пример 7.* Рассчитать текущую и среднегодовую доходность, а также доходность к погашению акции для акционера А и Б исходя из условий: выплаты дивидендов за 1-й год составили 50 тыс. руб., а затем ежегодно увеличивались на 10%. Акционер А приобрел акцию через год после ее выпуска и продал ее акционеру Б после года владения ею. Рассматриваемая акция выпущена была акционерным обществом по номиналу 200 тыс. руб. Спустя год стоимость акции составляла 250 тыс. руб., еще через год – 300 тыс. руб. Акционерное общество выкупило все свои акции по номиналу через 5 лет.

*Решение.* По условию задачи –  $N = 200$ ;  $Q = 50$ ;  $P_1 = 250$ ;  $P_2 = 300$ ;  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = 2$ ;  $n = 5$ .

Определим  $i_{эф}$ ,  $i_a$ ,  $i_t$  для акционеров А и Б.

Среднегодовая доходность  $i_a$  определим как отношение среднегодового дохода к затратам:

$$1. i_a = \frac{50 + (300 - 250)}{250} = 0,40 = 40\%$$

$$2. i_a = \frac{(55+60,5+66,55+(200-300))/3}{300} = 0,0912 = 9,12\%$$

Найдем текущую доходность. Она определяется отношением выплатой дивидендов:

$$1. i_t = 50/250 = 0,20 = 20,00\%$$

$$2. i_t = 50/300 = 0,1670 = 16,70\%$$

Для нахождения доходности к погашению  $i_{эф}$  воспользуемся следующими уравнениями:

$$1. 250 = 350/(1+i_{эф}). \text{ Отсюда: } i_{эф} = 0,4 = 40\%$$

$$2. 300 = 55/(1+i_{эф}) + 60,5/(1+i_{эф})^2 + 266,55/(1+i_{эф})^3. \text{ Используя сервис}$$

Подбор параметра MS Excel получаем:  $i_{эф} = 0,1004 = 10,04\%$

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ

1. Определить курс облигации, номинальная стоимость которой 1500 тыс. руб., если продается она по цене 1490 тыс. руб.

2. Необходимо найти текущую стоимость облигации номиналом 2 тыс. руб., купонной ставкой 8% годовых и сроком погашения через 3 года. Рыночная норма прибыли равна 5%.

3. Определить текущую стоимость облигации номиналом 6 млн. руб., исходя из условия: начисление процентов по купонной ставке 8% годовых каждые полгода. Облигация должна быть погашена через 9 лет. Ставка дисконтирования равна: а) 6%; б) 12%; в) 9%?

4. Первичное размещение государственных краткосрочных облигаций состоялось 15 июня. Определить доходность покупки облигаций по минимальной цене, при условии, что минимальная цена продажи – 91,8% от номинала. Срок обращения 36 дней; временная база К составляет 365 дней.

5. 50 облигаций номиналом по 10 млн. руб. и сроком погашения 5 лет были приобретены по курсу 0,97, а выпущены под процентную ставку сложных процентов 7% годовых. Необходимо определить прибыль от покупки и эффективную ставку сложных процентов для финансовой операции.

6. Срок погашения 30 облигаций, которые приобрела организация, составляет 4 месяца. Номинальная стоимость облигаций – 2 млн. руб., курс приобретения 95%. Необходимо определить прибыль от сделки, а также эффективную ставку прибыли по простым и сложным процентам.

7. Рассчитайте рыночную стоимость привилегированной акции, дивиденды по которой должны выплачиваться в размере 300000 руб. ежегодно. Норма доходности составляет 12%.

8. Требуется определить рыночную стоимость бескупонной облигации, номинал которой 10 млн руб., срок погашения по номиналу через 3 года, доходность облигации по годовой ставке 10%.

9. Какова рыночная стоимость облигации номиналом 1300 тыс. руб. и ежегодным купоном 12%. 7 лет – срок погашения по номиналу. Норма доходности по облигации 15%.

10. Какова текущая стоимость приобретённой акции, если она была приобретена за 800000 руб., а через год рыночная стоимость акции составила 1200000 руб. Дивиденды по ставке 30% выплачиваются по привилегированной акции номиналом 1 млн руб.

11. Государственные облигации сроком обращения 6 месяцев приобретены на 120-й день периода обращения по цене 88%. Определить доходность облигации к погашению.

## Тема 2

### ПОРТФЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Под инвестиционным портфелем понимают *совокупность финансовых инструментов, приносящих доход*. Ценные бумаги, составляющие портфель, отличаются обычно по уровням риска и прибыли. Не одинаков обычно и срок вложений в активы. Для успешной реализации портфельной стратегии инвестору необходимо подбирать набор активов с учетом диверсификации.

Перед инвестором встает задача оптимизации портфеля с целью минимизации риска и максимизации ожидаемого дохода.

Теория базируется на принципах статистического анализа данных.

Пусть имеется набор из  $n$  рисковых активов;  $x_j$  – доля  $j$ -го актива в портфеле; доходность  $j$ -го актива – это случайная величина  $r_j$ .

*Ожидаемая доходность* определяется как математическое ожидание:

$$\mu_j = E(r_j).$$

*Риск* каждого отдельного актива, связан с дисперсией и среднеквадратичным отклонением –  $\sigma_j = \sqrt{D(r_j)}$

*Инвестиционный портфель* представляет собой:

$$x = (x_1, x_1, \dots, x_1) \text{ – вектор долей активов; причем: } \sum_{j=1}^n x_j = 1$$

Доходность портфеля в целом определяется в этом случае соотношением:

$$R = \sum_{j=1}^n x_j r_j$$

Определим *риск портфеля*:

$$\sigma = \sqrt{D\left(\sum_{j=1}^n x_j r_j\right)}$$

Ожидаемая доходность портфеля определяется математическое ожидание:

$$\mu = E\left(\sum_{j=1}^n x_j r_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \mu_j$$

Задача диверсификации Марковица.

минимизировать риск  $\sigma(x) \rightarrow \min$  при ограничениях:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu \\ \sum_{j=1}^n x_j &= 1 \end{aligned}$$

Запишем задачу, учитывая следующее:

$$\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_j x_k \operatorname{cov}(r_j, r_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_j x_k \sigma_{jk} = xVx.$$

$$\begin{cases} xVx \rightarrow \min \\ \mu(x) = \mu \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1 \end{cases}$$

Представим задачу Марковица для случая двух различных рисков активов.

Пусть заданы:

- значения ожидаемых доходностей  $\mu_1$  и  $\mu_2$  ;
- дисперсии  $\sigma_1 = \sigma_{11}$  и  $\sigma_2 = \sigma_{22}$  ;
- коэффициент корреляции случайных активов  $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ .

Тогда для случая двух активов задача принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_j x_k \sigma_{jk} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^2 x_j \mu_j = \mu \\ \sum_{j=1}^2 x_j = 1 \end{array} \right.$$

Проведя ряд преобразований, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 \sigma_1^2 + x_1(1-x_1) * 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + (1-x_1)^2 \sigma_2^2 \rightarrow \min \\ \mu = x_1 \mu_1 + (1-x_1)\mu_2 \\ x_2 = 1 - x_1 \end{array} \right.$$

После элементарных преобразований получаем взаимосвязь между параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ .

$$\sigma^2 = \left( \frac{\mu_2 - \mu}{\mu_2 - \mu_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\mu_2 - \mu}{\mu_2 - \mu_1} \right) \left( \frac{\mu - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \right) * 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \left( \frac{\mu - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \right)$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Пример 1.* В таблицу представлена доходность актива за семь лет:

Год	1	2	3	4	5	6	7
Доход- ность	11	9	13	15	-7	-3	4

Требуется найти доходность и риск актива в форме стандартного отклонения доходности, а также доходность, которую по правилу «трех сигм» сможет получить через год приобретатель актива.

*Решение.* Согласно условию задачи средняя доходность составит

$$\bar{r} = (11+9+13+15-7-3+4) / 7 = 6\%$$

Далее рассчитаем стандартное отклонение доходности:

$$\sigma = \sqrt{(11-6)^2 + (9-6)^2 + (13-6)^2 + (15-6)^2 + (-7-6)^2 + (-3-6)^2 + (4-6)^2}$$

$$\sigma = 20,44\%$$

Согласно правилу «трех сигм»:

- вероятность 68.3% определяет попадание ожидаемой доходности в интервал одного стандартного отклонения от средней величины: (-14,45; 26,44)
- вероятность 95.4% определяет попадание в интервал двух стандартных отклонений: (-34,89%; 46,89%)
- вероятность 99.7% определяет попадание в интервал трех стандартных отклонений (-55.34%; 67.34%).

*Пример 2.* Приобретается два вида активов: актив I стоимостью 19 млн. руб. и актив II стоимостью 11 млн. руб. Ожидаемые доходности: первого актива - 9%, второго - 16%. Чему равна ожидаемая доходность готового портфеля.

*Решение.* Согласно условию задачи:

- вес актива I в портфеле составляет  $x_I = 19 \text{ млн. руб.} / 30 \text{ млн. руб.} = 0,633$

- вес актива II в портфеле составляет  $x_{II} = 11 \text{ млн. руб.} / 30 \text{ млн. руб.} = 0,367$

Рассчитаем ожидаемую доходность портфеля:

$$R = \sum_{j=1}^n x_j r_j$$

$$R = 9 \times 0,633 + 16 \times 0,367 = 11,57\%$$

*Пример 3.* Доли двух видов акций, из которых состоит инвестиционный портфель, составляют 0,3 и 0,7 соответственно. 15% и 23% стандартное отклонение доходностей активов. Ковариация доходностей акций составляет - 100. Определите риск портфеля (в форме стандартного отклонения доходности).

*Решение.* Для двух активов риск портфеля в форме стандартного отклонения доходности определяется из равенства:

$$\sigma^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_1 x_2 * 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2$$
$$\sigma = \sqrt{0,3^2 * 15^2 + 0,7^2 * 23^2 + 2 * 0,3 * 0,7 * (-100)} = 15,41$$

*Пример 4.* Ожидаемая доходность акций, которые есть возможность приобрести, и их стандартное отклонение составляет:

А – 53%; 14,37%

Б – 48%; 27,46%

В – 65%; 18,82%.

Определите какую из трёх видов акций выберет инвестор по критериям:

- максимум среднего ожидаемого дохода;

- минимум убытков;

- максимум функции рискового предпочтения для инвесторов. Коэффициент склонности к риску 0,8.

*Решение.* Согласно условию задачи акции *третьего* вида выберет инвестор, опираясь на критерий максимума среднего ожидаемого дохода, поскольку этому виду соответствует наибольшее значение ожидаемой доходности 65%.

У акции первого вида наименьшие значение стандартного отклонения доходности – 14,37%, поэтому ее следует предпочесть по критерию минимум убытков.

Значение функции рискового предпочтения  $F$  определим по формуле:

$F = \mu + a \times \sigma^2$ , где  $a$  – склонность инвестора к риску.

$$F_A = 53 + 0,8 \times 14,37 = 64,496$$

$$F_B = 48 + 0,8 \times 27,46 = 69,968$$

$$F_C = 65 + 0,8 \times 18,82 = 80,056$$

По функции рискового предпочтения выбрать стоит третий вариант инвестирования.

*Пример 5.* Рассматривается возможность формирования портфеля из двух рисковых активов с реализацией прибыли через год. Активы будут формировать портфель поровну. Доходы акций ожидаются в размере 10% и 7%. Ковариации доходностей активов представлены в виде матрицы:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0,05578 & 0,00354 \\ 0,00354 & 0,02115 \end{pmatrix}$$

Требуется определить доходность и риск рассматриваемого портфеля.

*Решение.* Согласно условию задачи –  $n = 2$ ;  $x_1 = x_2 = 0,5$ ;  $\mu_1 = 0,10$ ;  $\mu_2 = 0,07$ ;  $\sigma_{12} = 0,00354$ ;  $\sigma_1^2 = 0,05578$ ;  $\sigma_2^2 = 0,02115$ .

Определим:  $\mu$  и  $\sigma$

$$\mu = 0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,07 = 8,5\%$$

$$\sigma^2 = 0,5^2 \times 0,05578 + 0,5^2 \times 0,02115 + 2 \times 0,5 \times 0,5 * 0,00354 = 0.021003$$

$$\sigma = \sqrt{0.021003} = 0,144922$$

*Пример 6.* Средние доходности акций трех вида соответственно 0,06; 0,09 и 0,18. Дисперсии акций равны соответственно 0,35; 0,42 и 0,75. Ковариация между доходностями первой и второй акции равна -0,1; первой и третьей – 0,3; второй и третьей – 0,5. Каким должен быть оптимальный портфель, составленный из указанных акций по критерию минимума риска, а также эффективное множество портфелей. Необходимо получить доходность равную 0,12<sup>1</sup>.

*Решение.* Согласно условию задачи –  $n = 3$ ;  $\mu_1 = 0,06$ ;  $\mu_2 = 0,09$ ;  $\mu_3 = 0,18$ ;  $\sigma_{11} = \sigma_1^2 = 0,35$ ;  $\sigma_{22} = \sigma_2^2 = 0,42$ ;  $\sigma_{33} = \sigma_3^2 = 0,75$ ;  $\sigma_{12} = -0,1$ ;  $\sigma_{13} = 0,3$ ;  $\sigma_{23} = 0,5$ ;  $\mu_p = 0,12$ .

Определим:  $x_1, x_2, x_3$ ; а также  $\sigma_{\text{эф}} = f(\mu)$ .

<sup>1</sup> Копнова, Е.Д. Финансовая математика : учебник и практикум для вузов / Е. Д. Копнова. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 413 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00620-9. – Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/450365>

Для указанных данных задача Марковица представляет собой задачу минимизации целевой функции следующего вида:

$$\sigma^2 = 0,35x_1^2 + 0,42x_2^2 + 0,75x_3^2 + 2 \cdot (-0,1)x_1x_2 + 2 \cdot 0,3x_1x_3 + 2 \cdot 0,5x_2x_3$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0,06x_1 + 0,09x_2 + 0,18x_3 = 0,12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Для решения задачи математического программирования воспользуемся надстройкой «Поиск решения» программы MS Excel. Надстройку можно найти на вкладке Данные / Анализ данных. Расчет с помощью надстройки приведен ниже.

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3		
2	Переменные, x <sub>j</sub>	0,305915000179561	0,258780116510114	0,435304883310325		
3	Квадраты, x <sub>j</sub> <sup>2</sup>	=B2^2	=C2^2	=D2^2		
4	Произведения, x <sub>j</sub> *x <sub>i</sub>	=B2*C2	=B2*D2	=C2*D2		
5	Исходные данные	0,06	0,09	0,18		
6		1	1	1		
7		0,35	0,42	0,75		
8		-0,1	0,3	0,5		
9	Ограничения	=B5*B\$2	=C5*C\$2	=D5*D\$2	=СУММ(B9:D9)	0,12
10		=B6*B\$2	=C6*C\$2	=D6*D\$2	=СУММ(B10:D10)	1
11	Целевая функция	=B7*B3	=C7*C3	=D7*D3	=СУММ(B11:D11)	
12		=B8*2*B4	=C8*2*C4	=D8*2*D4	=СУММ(B12:D12)	
13					=СУМ(E11:E12)	

  

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3		
2	Переменные, x <sub>j</sub>	0,306	0,259	0,435		
3	Квадраты, x <sub>j</sub> <sup>2</sup>	0,09	0,07	0,19		
4	Произведения, x <sub>j</sub> *x <sub>i</sub>	0,08	0,13	0,11		
5	Исходные данные	0,06	0,09	0,18		
6		1	1	1		
7		0,35	0,42	0,75		
8		-0,1	0,3	0,5		
9	Ограничения	0,018	0,023	0,078	0,120	0,12
10		0,306	0,259	0,435	1,000	1
11	Целевая функция	0,033	0,028	0,142	0,203	
12		-0,016	0,080	0,113	0,177	
13					0,379713	
14						

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ

1. Решить задачу Марковица для параметров, заданных в таблице

Исходные данные	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\sigma_1$	2	3	5
$\sigma_2$	4	6	3
$\mu_1$	21	45	5
$\mu_2$	13	65	8
$\rho_{12}$	-0,6	0,2	0,8

2. Рассматривается возможность формирования портфеля из двух рисков-ных активов с реализацией прибыли через год. Активы будут формировать портфель в соотношении 1 к 2 соответственно. Доходы акций ожидаются в размере 5% и 3%. Ковариации доходностей активов представлены в виде матрицы:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0,0334 & 0,00787 \\ 0,00787 & 0,0672 \end{pmatrix}$$

Требуется определить доходность и риск рассматриваемого портфеля.

3. Определите структуру портфеля минимального риска, ожидаемая доходность которого – 12%. В портфеле предполагается два пакета акций, ожидаемые доходности которых 6% и 9%. Матрица ковариаций активов выглядит следующим образом:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ .

4. Каков оптимальный портфель (ожидаемая доходность 15%) из трех независимых пакетов акций, данные о которых сведены в таблицу:

<b>Характеристики акций</b>	<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>
Ожидаемая доходность	3%	9%	27%
Риск	5%	20%	40%

5. Два рыночных актива А и Б обладают следующими характеристиками: ковариация доходности этих активов составляет 210, «бета» актива А – 1,1, остаточные доходности активов не коррелируют. Дисперсия средней рыночной доходности составляет 225. Требуется найти «бета» актива Б.

6. Характеристики инвестиционного портфеля собраны в таблицу:

<b>Показатель</b>	<b>Акции I</b>	<b>Акции II</b>
Стандартное отклонение доходностей, %	13	27
Стоимость активов, тыс. руб.	2100	1750
Коэффициент корреляции доходностей		-0,7

Риск портфеля в форме стандартного отклонения доходностей требуется определить.

7. Необходимо найти ожидаемую доходность инвестиционного портфеля, составленного из рискованного актива А и безрискового актива Б, если ожидаемая доходность актива А равна 31% годовых. Рискованный актив А на 70 тыс. руб., приобретен за счет собственных средств, а безрисковый актив Б на сумму 50 тыс. руб. занимается под 8% годовых для дополнительного приобретения актива А.

8. Характеристики инвестиционного портфеля, состоящего из активов двух видов представлены в таблице:

<b>Показатель</b>	<b>Актив А</b>	<b>Актив Б</b>
Стандартное отклонение доходностей, %	11	19
Ожидаемая доходность активов, %	35	50

Необходимо рассчитать доходность безрискового портфеля.

9. Рискованный актив стоимостью 1,300 млн. руб. приобретается за счет собственных средств. Безрисковый актив на сумму 0,800 млн. руб. инвестор занимает по ставке 9% годовых и вкладывает их дополнительно в актив А. Ожидаемая доходность актива А составляет 18% годовых, стандартное отклонение доходности 21%. Найдите доходность и риск портфеля.

## Тема 3

### САРМ И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ

Модель ценообразования капитальных активов (САРМ) позволяет оценить справедливую доходность актива с учетом рисков. Полученную оценку используют, например, как коэффициент дисконтирования при оценке цены активов через денежные потоки.

Коэффициент  $\beta$  (бета) – статистический параметр, характеризующий волатильность финансового актива по сравнению с фондовым рынком в целом, т.е. показывает на сколько процентов при изменении доходности портфеля на единицу повысится или понизится среднее значение доходности актива. Параметр  $\beta$  могут рассчитывать как для отдельной акции, так и для портфеля в целом.

$R_t = \alpha + \beta W_t + \varepsilon_t$ ,  $t$  изменяется от 1 до 12. ( $\varepsilon_t$  – остаточная доходность  $t$ -го актива, коэффициент  $\alpha$  не имеет определенного экономического смысла – поправочный коэффициент).

Бета инвестиционного портфеля можно определить по формуле:

$$\beta_P = \sum_1^n \beta_i w_i,$$

где  $\beta_i$  – бета  $i$ -го актива;

$w_i$  – удельный вес  $i$ -го актива;

$n$  – количество активов в портфеле.

В модели оценки капитальных активов САРМ (Capital Assets Price Model, У. Шарп) коэффициент бета используется в качестве меры систематического риска. Акции различных компаний по степени риска позволяет сравнивать коэффициент бета.

Коэффициент бета может иметь как положительный, так и отрицательный знак, который показывает положительную или отрицательную корреляцию между акцией и рынком. Положительный знак отражает, что доходность акций

и рынка изменяются в одном направлении, отрицательный – разнонаправленное движение.

Для некоторого  $i$ -го актива верны утверждения:

<b>Величина бета</b>	<b>Свойство <math>i</math>-го актива</b>
$\beta_i > 1$	относится к агрессивным активам, поскольку обладает большим риском, чем рыночный портфель
$\beta_i < 1$	относится к защитным активам, поскольку обладает меньшим риском, чем рыночный портфель
$\beta_i = 1$	колеблется вместе с рынком и ее риск эквивалентен общерыночному

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Пример 1.* Пусть имеется ряд данных, отображающих доходность акции и среднерыночной доходности ее за год, указанную в процентах. Данные сведены в таблицу. Требуется определить бета актива.

#### Доходность акции

Номер периода	$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Доходность акции	$R_t$	5	8	9	12	9	10	14	13	14	15	13	16
Среднерыночная доходность	$W_t$	10	12	12	14	14	13	15	13	14	15	14	16

*Решение.* Требуется найти коэффициент  $\beta$ .

Найти искомый параметр можно с помощью уравнения следующего вида:

$R_t = \alpha + \beta W_t + \varepsilon_t$ ,  $t$  изменяется от 1 до 12. ( $\varepsilon_t$  – остаточная доходность  $t$ -го актива, коэффициент  $\alpha$  не имеет определенного экономического смысла – поправочный коэффициент).

Для решения задачи воспользуемся надстройкой «Анализ данных» программы MS Excel. Надстройку можно найти на вкладке Данные / Анализ данных. Для решения данной задачи потребуется расчет регрессии. Расчет с помощью надстройки приведен ниже.

На первом рисунке представлен ввод необходимых данных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>W</i>							
2	1	5	10							
3	2	8	12							
4	3	9	12							
5	4	12	14							
6	5	9	14							
7	6	10	13							
8	7	14	15							
9	8	13	13							
10	9	14	14							
11	10	15	15							
12	11	13	14							
13	12	16	16							
14										
15										
16										

**Регрессия**

Входные данные

Входной интервал Y:

Входной интервал X:

Метки  Константа - ноль

Уровень надежности:  %

Параметры вывода

Выходной интервал:

Новый рабочий лист

Новая рабочая книга

Остатки

Остатки  График остатков

Стандартизованные остатки  График подбора

Нормальная вероятность

График нормальной вероятности

Представленный ниже рисунок демонстрирует результаты расчета регрессии.

	E	F	G	H	I	J	K
<b>ВЫВОД ИТОГОВ</b>							
<i>Регрессионная статистика</i>							
Множественный R		0,902					
R-квадрат		0,814					
Нормированный R-квадрат		0,795					
Стандартная ошибка		1,488					
Наблюдения		12					
<i>Дисперсионный анализ</i>							
		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>	
Регрессия		1	96,9	96,9	43,754	0,000	
Остаток		10	22,1	2,2			
Итого		11	119				
		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
Y-пересечение		-13,17	3,75	-3,51	0,01	-21,54	-4,81
<i>W</i>		1,83	0,28	6,61	0,00	1,21	2,44

Для данных о доходности рассматриваемой акции получаем следующие выводы: до 90,2% наблюдается взаимосвязь доходности актива с показателем рыночной доходности; кроме того, построенная модель имеет коэффициент детерминации 81,4%, что говорит о высокой достоверности модели.

Вывод: с вероятностью 95% можно утверждать, что нижнее значение искомого параметра  $\beta$  равно 1,21, а верхнее – 2,44.

*Пример 2.* Имеется ряд данных, отображающих месячные котировки акций компании ОАО «Газпром» и индекса РТС за октябрь 2022 г. (данные с сайта <https://ru.investing.com/>). Данные сведены в таблицу. Требуется определить бета актива.

*Решение.* Требуется найти коэффициент  $\beta$ .

Дата	Цена ГазПром	Цена РТС
27.09.2022	217,3	1053,46
28.09.2022	217,38	1074,57
29.09.2022	226,46	1072,26
30.09.2022	217,7	1055,72
03.10.2022	215,83	1091,87
04.10.2022	210,72	1100,14
05.10.2022	209,05	1061,97
06.10.2022	212,86	1044,82
07.10.2022	195,15	1005,04
10.10.2022	163,89	963,88
11.10.2022	162,89	964,67
12.10.2022	161,8	954,53
13.10.2022	160,84	968,34
14.10.2022	159,6	990,66
17.10.2022	163,24	1027,83
18.10.2022	160,2	1039,76
19.10.2022	161,29	1010,24
20.10.2022	160,75	1041,56
21.10.2022	166,99	1050,57
24.10.2022	165,47	1062,66
25.10.2022	172,38	1090,96
26.10.2022	171,98	1088,59
27.10.2022	173,21	1105,71

Рассчитаем доходности по акциям и индексу, воспользовавшись следующей формулой:  $R_t = \text{LN}(t/(t-1))$ . Результат представлен на следующем рисунке.

	A	B	C	D	E
4	Дата	Цена ГазГ	Цена РТС		
5	27.09.2022	217,3	1053,46		
6	28.09.2022	217,38	1074,57	0,04%	=LN(C6/C5)
7	29.09.2022	226,46	1072,26	4,09%	LN(число)
8	30.09.2022	217,7	1055,72	-3,95%	-1,55%
9	03.10.2022	215,83	1091,87	-0,86%	3,37%
10	04.10.2022	210,72	1100,14	-2,40%	0,75%
11	05.10.2022	209,05	1061,97	-0,80%	-3,53%
12	06.10.2022	212,86	1044,82	1,81%	-1,63%
13	07.10.2022	195,15	1005,04	-8,69%	-3,88%
14	10.10.2022	163,89	963,88	-17,46%	-4,18%
15	11.10.2022	162,89	964,67	-0,61%	0,08%
16	12.10.2022	161,8	954,53	-0,67%	-1,06%
17	13.10.2022	160,84	968,34	-0,60%	1,44%

Коэффициент бета можно получить рассчитав коэффициент линейной регрессии между двумя анализируемыми массивами. Для этого удобнее использовать средства MS Excel. Расчет можно произвести двумя способами:

- используя формулу ИНДЕКС()
- используя сервис «Анализ данных».

Применив функцию ИНДЕКС() получим только значение бета:

Дата	Цена ГазГ	Цена РТС			
27.09.2022	217,3	1053,46			=ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D6:D27;E6:E27);1)
28.09.2022	217,38	1074,57	0,04%	1,98%	ИНДЕКС(массив; номер_строки; [номер_столбца])
29.09.2022	226,46	1072,26	4,09%	-0,22%	ИНДЕКС(ссылка; номер_строки; [номер_столбца])
30.09.2022	217,7	1055,72	-3,95%	-1,55%	
03.10.2022	215,83	1091,87	-0,86%	3,37%	

F5    fx    =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D6:D27;E6:E27);1)

	A	B	C	D	E	F	G
4	Дата	Цена ГазГ	Цена РТС			Бета	
5	27.09.2022	217,3	1053,46			1,087758	
6	28.09.2022	217,38	1074,57	0,04%	1,98%		
7	29.09.2022	226,46	1072,26	4,09%	-0,22%		
8	30.09.2022	217,7	1055,72	-3,95%	-1,55%		
9	03.10.2022	215,83	1091,87	-0,86%	3,37%		
10	04.10.2022	210,72	1100,14	-2,40%	0,75%		

Воспользуемся теперь сервисом «Анализ данных»: вкладка Данные / Анализ данных / Регрессия.

Поле «Входной интервал Y» заполняем значениями доходности акций Газпрома, а поле «Входной интервал X» – значениями доходности индекса РТС.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>ВЫВОД ИТОГОВ</b>								
2									
3	<i>Регрессионная статистика</i>								
4	Множественный R	0,559524568							
5	R-квадрат	0,313067743							
6	Нормированный R-квадрат	0,27872113							
7	Стандартная ошибка	0,03901323							
8	Наблюдения	22							
9									
10	<i>Дисперсионный анализ</i>								
11		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>значимость F</i>			
12	Регрессия	1	0,01387325	0,01387325	9,1149524	0,006778			
13	Остаток	20	0,030440642	0,001522032					
14	Итого	21	0,044313892						
15									
16		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>	<i>Нижние 95,0%</i>	<i>Верхние 95,0%</i>
17	Y-пересечение	-0,012701364	0,008355343	-1,520148669	0,1441259	-0,03013	0,004728	-0,03013	0,004728
18	Переменная X 1	1,087758187	0,360292447	3,019097951	0,0067779	0,336201	1,839315	0,336201	1,839315
19									

На листе итогов представлено значение коэффициента линейной регрессии в строке Переменная X1. Это значение и есть коэффициент бета. Его значение – 1,0877 ( $\beta > 1$ ) свидетельствует о высоком риске для акций и однонаправленное изменение доходностей. Кроме того, силу взаимосвязи между анализируемыми массивами показывает коэффициент R-квадрат. В данном случае он свидетельствует о довольно низкой взаимосвязи – 0,313.

*Пример 3.* Акции 3-х видов, составляющие инвестиционный портфель, обладают следующими характеристиками:

	<b>Акции вида А</b>	<b>Акции вида Б</b>	<b>Акции вида С</b>
Доля актива в портфеле	0,4	0,2	0,4
Бета актива	0,6	1,2	1,4

Определите коэффициент бета для инвестиционного портфеля в целом.

*Решение.* Согласно условиям задачи и формулы для расчёта  $\beta$  портфеля в целом имеем:

$$\beta_p = \sum_1^n \beta_i w_i = 0,4 \times 0,6 + 0,2 \times 1,2 + 0,4 \times 1,4 = 1,04.$$

Полученное значение бета больше 1, что свидетельствует о достаточно высоком риске.

### **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ**

1. Какова ожидаемая доходность акции компании, если для нее известно значение  $\beta = 1,3$ . При этом актуальны следующие условия: доходность рыночного портфеля предполагается равной 12%; рынок находится в равновесии; безрисковая процентная ставка – 8%.

2. Выберите 5 акций российских эмитентов, постройте портфель акций с минимальным риском. Используйте открытые источники данных.

3. Выберите 7 акций российских эмитентов, для которых постройте график зависимости доходности и риска допустимых портфелей. Используйте открытые источники данных.

4. Сколько значений средних, дисперсий и ковариаций необходимо рассчитать, чтобы определить риск портфеля, состоящего из 20 видов акций.

5. Среднеквадратическое отклонение доходности акций компании I равно 21% в год, а бета – +0,13. 30% в год среднее квадратическое отклонение акций компании II, а бета – +0,1. Какие из этих акций наиболее привлекательны для инвестора, если он формирует диверсифицированный портфель акций.

## Тема 4

# ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ДЕРИВАТИВОВ

Деривативами или производными финансовыми инструментами называют контракты, определяющие действия по отношению к некоторому финансовому активу, например, первичным ценным бумагам – акциям, облигациям. Причем, доходность дериватива достаточно сильно зависит от колебания цены базисного актива. А его доходность определяется потоком платежей, связанным с базисным активом.

Рассмотрим такие деривативы как форвардные контракты, фьючерсные контракты, опционы.

Форвардный контракт – это договор, по которому стороны берут на себя обязательство купить или продать определённый актив в определённый срок в будущем по фиксированной цене (цене поставки).

Во время совершения форвардной сделки ни одна из сторон ничего другой стороне не выплачивает. При наступлении времени исполнения форвардного контракта доход от занятой позиции, определяется ценой контракта  $X_t$  и сложившейся рыночной ценой спот  $S_T$ . Длинную позицию занимает покупатель актива, короткую позицию занимает продавец.

Форвардная цена, прописанная в контракте, может быть определена по формуле:

- для долгосрочных периодов:  $F = S(1 + r)^t$

- для краткосрочных периодов до года:  $F = S(1 + r D/K)$ ,

где  $S$  – спот цена по базовому активу;

$t$  – время до исполнения контракта;

$r$  – безрисковая ставка заимствования;

$D$  – количество дней до исполнения контракта;

$K$  – используемая временная база (360 или 365 дней в году).

Фьючерсный контракт (фьючерс), заключаемый на специальной бирже форвардный контракт. Это гарантирует его исполнение. Фьючерсы предполагают наличие маржи и могут использоваться для финансовых спекуляций.

Опцион – это контракт, по которому покупатель опциона получает право купить или продать некоторые актив по договорной цене исполнения, а второй участник – продавец опциона – принимает обязательства обеспечить реализацию указанного выше права. Опционный контракт не является равноправным и сопровождается выплатой компенсирующей премии.

Опцион на покупку называется опционом «колл», опционом «пут» принято называть опцион на продажу.

По моменту исполнения опционы делятся на европейские и американские. Европейский опцион исполняется только в момент истечения его срока. Американский опцион может быть исполнен в любой момент срока его действия.

Покупатель опциона уплачивает продавцу определенную премию  $C$ .

Функцию, с помощью которой можно описать выигрыш или проигрыш держателя опциона, называют *функцией платежа*.

Для стандартного опциона «колл» (call) и опциона «пут» (put) функции платежа имеют вид:

$$f_c = \max(0, S - K) = (S - K)$$

$$f_p = \max(0, K - S) = (K - S)$$

где  $K$  – цена исполнения, т.е. заранее оговоренное число;

$S$  – цена базисного актива на момент исполнения опциона.

Теорема о паритете опционов «колл» и «пут»:

$$C_{CALL} + \frac{K_{CALL}}{1 + r_0} = C_{PUT} + S_0$$

где  $C_{call}$  – цена «колл» опциона;

$C_{put}$  – цена «пут» опциона;

$K_{call}$  – цена исполнения «колл» опциона;

$S_0$  – цена базисного актива при  $t_0 = 0$ ;

$r_0$  – безрисковая процентная ставка на период  $[t, T]$ .

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Пример 1.* Определить доход инвестора от позиций по следующим форвардным контрактам:

- по первому контракту инвестор выступает продавцом некоторого актива по контрактной цене 3000 руб.;

- по трем другим сделкам инвестор выступает в качестве покупателя (т.е. занимает длинную позицию) того же актива по контрактной цене 2700 руб., на момент исполнения контрактов, при спот-цене 2400 руб.

*Решение.* Согласно условию задачи:

- доход инвестора в качестве продавца составит:

$$(X_0 - S_T) \times n_{short} = (3000 - 2400) \times 1 = 600 \text{ руб.};$$

- доход инвестора в качестве покупателя составит:

$$(S_T - X_0) \times n_{long} = (2400 - 2700) \times 3 = -900 \text{ руб.}$$

Общий доход инвестора:  $600 - 900 = -300$  руб.

*Пример 2.* Найдем шестимесячную форвардную цену биржевого товара, если условия контракта следующие: спот-цена биржевого товара 6000 руб., расходы по хранению и страхованию биржевого товара составляют 7% от спот-цены, полугодовая безрисковая ставка – 13% годовых.

*Решение.* Согласно условию задачи общие затраты, связанные с владением активом равны:

$$r = 0,13 + 0,07 = 0,2$$

Форвардная цена определяется по формуле:

$$F = S(1 + r D/K) = 6000 (1 + 0,2 \cdot 6/12) = 6600 \text{ руб.}$$

*Пример 3.* Погашение бескупонной облигации предусмотрено через 240 дней, при условии, что временная база составляет 360 дней. Через 60 дней 180-дневная форвардная ставка составит 10% годовых. Определить 60-дневную форвардную цену облигации.

*Решение.* К сроку погашения цена бескупонных облигаций будет равна 100%: определяется она в процентах от номинала.

Согласно условию задачи, форвардная цена облигации будет определяться из уравнения:

$$F_{60,240} = S_{60} (1 + r \times 180/360) = 100$$

Причем:  $S_{60} = F_{0,60} = S_0 (1 + r \times 60/360)$

В результате получаем:

$$F_{0,60} = F_{60,240} / (1 + r \times 180/360) = 100 / (1 + 0,1 \times 180/360) \approx 99,50$$

*Пример 4.* Пусть временна'я база равна 360 дней. Спот-цена акции составляет 2000 руб., а безрисковая ставка – 11%. Через 90 дней фактическая цена акции составила 2090 руб. Необходимо понять: возможен ли арбитраж?

*Решение.* В соответствии с условиями задачи получаем теоретическую форвардную цену:

$$F = 2000 (1 + 0,11 \times 90/360) = 2055 \text{ руб.}$$

Цена не совпадает с указанной в условии, следовательно возможен арбитраж.

*Пример 5.* Форвардный контракт на приобретение облигации с нулевой купонной ставкой, сроком погашения через год, заключен на три месяца. Текущая цена облигации составляет 1050 тыс. руб. 8% составляет безрисковая процентная ставка непрерывного начисления. Она является постоянной. Рассчитайте форвардную цену облигации и определите какая цена поставки должна быть зафиксирована в контракте.

*Решение.* Согласно условию задачи:  $S_0 = 1050$ ;  $r = 0,08$ ;  $T = 1/4$ .

Найдем  $X$  и  $F_t$  по формуле:

$$F_t = S_t \times e^{0,08 \times (\frac{1}{4} - t)}, \text{ при } t \text{ от } 0 \text{ до } \frac{1}{4}.$$

Следовательно:  $X = F_0 = 1050 \times e^{0,08 \times (\frac{1}{4} - 0)} = 1071,21 \text{ тыс. руб.}$

Цена поставки совпадает с ценой исполнения форвардного контракта, т.к. форвардная цена определяется начальными условиями контракта.

*Пример 6.* «Инвестор приобретает годовой опцион «пут» на 100 акций с ценой исполнения 100 долл. за каждую, уплачивая премию в 500 долл. Покупая опцион, инвестор ожидает понижение цены акции. Если цена акции через год будет больше 100 долл., например 115 долл., то инвестор не воспользуется опционом. Он может продать акции по 115 долл. или не продавать их вовсе. При этом он теряет 500 долл., затраченный на опцион. Если же цена будет меньше 100 долл., например 85 долл., то инвестор реализует своё право и продаёт акции по 100 долл. При этом он получит прибыль в 1000 долл., если он перед продажей покупает акции по текущей цене»<sup>2</sup>

*Пример 7.* Стоимость «колл» опциона составляет 700 руб., акции, на которые выписывается опцион в начальный момент времени, стоят 3500 руб., а цена исполнения 2800 руб. Вычислить стоимость европейского «пут» опциона, если безрисковая ставка до момента исполнения 12%.

*Решение.* Исходя из условия задачи и используя теорему о паритете опционов «колл» и «пут» получаем:

$$C_{CALL} + \frac{K_{CALL}}{1+r_0} = C_{PUT} + S_0 \Rightarrow C_{PUT} = C_{CALL} + \frac{K_{CALL}}{1+r_0} - S_0$$

$$C_{put} = 700 + 2800/1,12 - 3500 = -300 \text{ руб.}$$

*Пример 8.* Инвестор узнал, что акции некоторой фирмы в ближайшее время будет торговаться по заниженной цене. На данный момент курс акций составляет  $S_0 = 600$  руб. Инвестор вкладывает средства в 270 «пут» опционов на акции, владельцами которых он не является. Цена исполнения «пут» опционов

---

<sup>2</sup> Копнова, Е. Д. Финансовая математика : учебник и практикум для вузов / Е. Д. Копнова. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 413 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00620-9. – Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/450365>

равна  $K = 500$  руб., а срок их исполнения составляет 3 месяца. Цена каждого опциона равна  $C = 60$  руб.

Определить размер прибыли (или убытка) инвестора, учитывая плату по опционной сделке каждый раз. Курс акций в ближайшие 3 месяца:

1) останется в размере  $S = 600$  руб.

2) снизится до  $S = 400$  руб.

*Решение.* Согласно условию задачи:

1) так как цена исполнения опциона ниже рыночной стоимости акций, то инвестору не выгодно исполнять опцион. Но в этом случае он теряет премию за опцион с каждой акции, т.е. убыток составит:

$$C \times N = 60 \times 270 = 16200 \text{ руб.}$$

2) выигрыш инвестора из расчета на акцию, согласно формуле для расчета функции платежа, получим:

$$f_p = (K - S)_+$$

$$f_p = 500 - 400 = 100 \text{ руб.}$$

С учетом цены опциона:

$$f_p - C = 100 - 60 = 40 \text{ руб.}$$

С учетом всех 270 опционов получаем:

$$(f_p - C) \times N = 40 \times 270 = 10800 \text{ руб.}$$

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ

1. Определить доход инвестора на момент поставки от позиций по следующим форвардным контрактам:

- по первому контракту инвестор выступает продавцом трех единиц некоторого актива с ценой поставки 6000 руб.;

- по двум другим сделкам инвестор выступает в качестве покупателя (т.е. занимает длинную позицию) того же актива.

Учтите, что реальные активы не приносили промежуточного дохода, а спот-цена составляет 5600 руб.

2. Определить шестимесячную форвардную цену акции, спот-цена которой составляет 1300 руб., а безрисковая ставка равна 12%. Дивиденды в течение полугода выплачиваться не будут.

3. Возможен ли арбитраж по следующему форвардному контракту: спот-цена акции составляет 1500 руб.; безрисковая ставка равна 11%; через 90 дней фактическая цена акции составит 1580 руб. Временная база равна 360 дней.

4. Определить трехмесячную форвардную ставку на акцию, спот-цена которой равна 1500 руб.; безрисковая ставка составляет 11%; а через три месяца будет выплачен дивиденд в размере 90 руб. Срок контракта истекает сразу же после выплаты дивиденда.

5. Определить цену следующего контракта, который его покупатель контракта перепродает на вторичном рынке: контрактная цена акции 862 руб.; спот-цена – 812 руб., безрисковая ставка – 10% годовых. До срока поставки акции по форвардному контракту осталось полгода.

6. Пусть один доллар стоит 30 руб. Компания заказала в США товары на \$300000. Поставка товаров и их оплата предполагается в конце этого же года. Согласно прогноза курс американского доллара на протяжении года повысится, поэтому фирма покупает 6000 «колл» опционов, каждый на \$150 с ценой исполнения 33 руб. и сроком исполнения 1 год. Стоимость такого опциона 180 руб.

Определить выгоду от купленных опционов, если в этом году \$1 будет стоить 34 руб.

7. Определить стоимость европейского «колл» опциона, если стоимость «пут» опциона равна 150 руб. Опцион выписывается на акции, цена которых в начальный момент времени, равна 900 руб., а цена исполнения 750 руб., безрисковая ставка до момента исполнения равна 11%.

8. В рамках однопериодной модели вычислить цену «колл» опциона на акцию при ее первоначальной стоимости 1500 руб., цене исполнения 1650 руб., вероятном увеличении цены акции до 1850 руб. и уменьшении до 1350 руб., безрисковая процентная ставка на период до исполнения опциона 12%. Найти коэффициент полного хеджирования.

9. Инвестор приобретает на три месяца «пут» опцион. В момент заключения контракта курс акции равен 1559 руб., а цена исполнения – 1590 руб. Безрисковая процентная ставка составляет 9%. По прогнозу за один месяц курс акций может подняться до 1690 руб., а возможно и опуститься до 1480 руб. Найти цену опциона в рамках многошаговой модели.

10. Построить график дохода по комбинации «колл1» + «колл2» (спрэд) в зависимости от цены базисного актива для ситуации, в которой инвестор одновременно покупает «колл1» опцион за 120 руб. с ценой исполнения 1200 руб. и продает «колл2» опцион с ценой исполнения 1350 руб. за 60 руб.

11. Определите премию «колл» опциона, если известно, что курс акции в момент заключения контракта равен 1500, цена исполнения опционного контракта 1350, безрисковая ставка равна 10%, период составляет полгода, а стандартное отклонение цены акции 0.525.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Брейли, Ричард, Майерс, Стюарт. Принципы корпоративных финансов / Пер. с англ. Н. Барышниковой. – М.: ЗАО «Олимп–Бизнес», 2008. – 1008 с: ил.
2. Бухвалов, А., Бухвалова, В., Идельсон, А. Финансовые вычисления для профессионалов / А. В. Бухвалов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2001. – 316 с.
3. Галанов, В. А. Производные финансовые инструменты: учебник / В. А. Галанов. – 2-е изд, перераб. и доп.– Москва: ИНФРА-М, 2019. – 221 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – [www.dx.doi.org/10.12737/21804](http://www.dx.doi.org/10.12737/21804). – ISBN 978-5-16-105154-2. – Текст: электронный. – URL: <https://new-znanium-com.ezproxy.ranepa.ru:2443/catalog/product/1012374>
4. Джон, К. Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты, 8-е издание. – Издательский дом Вильямс, 2018. – 1072 с.
5. Копнова, Е. Д. Финансовая математика : учебник и практикум для вузов / Е. Д. Копнова. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 413 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00620-9. – Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/450365>
6. Кулагина, И. И. Рабочая программа дисциплины Б1.О.09 «Финансовая математика» – URL: [https://docs.vlgr.ranepa.ru/sveden/education/2022/38.03.01/FK/rp/RP\\_Fin\\_mat\\_VkE\\_2022\\_27.09.2021.pdf](https://docs.vlgr.ranepa.ru/sveden/education/2022/38.03.01/FK/rp/RP_Fin_mat_VkE_2022_27.09.2021.pdf)
7. Лычагин, М. В. Корпоративные финансы : практикум : учебное пособие для бакалавров, обучающихся по направлению «Экономика» / М. В. Лычагин, А. А. Перфильев, Л. В. Перфильева; М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, экон. фак. – Новосибирск : экон. фак. НГУ, Новосибирск, 2015. 185 с.
8. Четыркин, Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – М.: Дело, 2010 – 400 с.
9. Четыркин, Е. М. Финансовые риски: научно-практ. пособие / Е. М. Четыркин. – М.: Дело, 2008. – 176 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## ПРИМЕРНЫЙ ТЕСТ ПО КУРСУ<sup>3</sup>

**1. Ставку процента в формуле чистой приведенной стоимости инвестиционного проекта обычно называют:**

- 1) альтернативными издержками;
- 2) предельными издержками;
- 3) инвестиционными издержками;
- 4) издержками риска.

**2. Для расчета срока обычной годовой ренты можно воспользоваться финансовой функцией MS Excel:**

- 1) КПЕР();
- 2) ПС();
- 3) ПЛТ();
- 4) БС()

**3. Финансовые функции MS Excel могут быть применены при анализе рент:**

- 1) обычных годовых;
- 2) годовых с непрерывным начислением процентов;
- 3) р-срочных с начислением процентов  $m$  раз в год;
- 4) вечных.

**4. Формула сложных процентов с неоднократным начислением процентов в течение года:**

- 1)  $S = P(1 + j_m/m)^{nm}$ ;
- 2)  $S = P(1 + i)^{nm}$ ;
- 3)  $S = P(1 + j_m \times m)^{nm}$ ;
- 4)  $S = P/(1 + j_m/m)^{n/m}$ .

**5. К стандартным характеристикам риска не относится:**

- 1) коэффициент ковариации;
- 2) математическое ожидание;
- 3) дисперсия;
- 4) коэффициент вариации.

**6. Цену изделия дважды снижали на 50%, а затем на 300% увеличили. В результате этого цена:**

- 1) вернулась к первоначальному уровню;
- 2) увеличилась на 200%;
- 3) возросла в три раза;
- 4) удвоилась;
- 5) уменьшилась на 50%.

**7. Число лет, необходимых для возмещения инвестиционных расходов называется:**

- 1) периодом окупаемости инвестиционного проекта;

---

<sup>3</sup> Кулагина И. И. Рабочая программа дисциплины Б1.О.09 «Финансовая математика» – URL: [https://docs.vlgr.ranepa.ru/sveden/education/2022/38.03.01/FK/rp/RP\\_Fin\\_mat\\_BkE\\_2022\\_27.09.2021.pdf](https://docs.vlgr.ranepa.ru/sveden/education/2022/38.03.01/FK/rp/RP_Fin_mat_BkE_2022_27.09.2021.pdf)

- 2) средней нормой прибыли на инвестиции;
- 3) чистой современной ценностью инвестиционного проекта;
- 4) внутренней нормой доходности.

**8. Укажите формулу, по которой вычисляется срок удвоения первоначальной суммы при применении простых процентов:**

- 1)  $n = 1/i$ ;
- 2)  $n = 0,5/i$ ;
- 3)  $n = 0,3/i$ ;
- 4)  $n = 1,5/i$ .

**9. Что такое рента постнумерандо?**

- 1) рента, платежи которой поступают в конце каждого периода;
- 2) рента, образуемая платежами после некоторого указанного момента времени;
- 3) рента, платежи которой скорректированы на величину налога;
- 4) рента, платежи которой скорректированы с учетом инфляции.

**10. Чем отличается американский опцион от европейского?**

- 1) датой погашения;
- 2) суммой погашения;
- 3) базовым активом;
- 4) именем продавца.

**11. Что является мерой риска для портфеля ценных бумаг?**

- 1) ковариация активов в портфеле;
- 2) математическое ожидание;
- 3) дисперсия;
- 4) доходность безрискового актива.

**12. Как зависит доходность потребительского кредита для продавца от стоимости товара?**

- 1) не зависит;
- 2) чем выше стоимость товара, тем выше доходность потребительского кредита для продавца;
- 3) чем ниже стоимость товара, тем выше доходность потребительского кредита для продавца.

**13. Как влияет на доходность сделки для кредитора взимание комиссионных?**

- 1) взимание комиссионных увеличивает доходность сделки для кредитора;
- 2) взимание комиссионных уменьшает доходность сделки для кредитора;
- 3) взимание комиссионных не влияет на доходность сделки для кредитора.

**14. Депозитная ставка равна 7% с начислением по сложному годовому проценту. Определить период времени, по истечении которого процентные деньги сравняются с величиной вклада:**

- 1) 10 лет;
- 2) 5 лет;
- 3) 12 лет;
- 4) всегда будут меньше.

**15. Для расчета современной ценности платежей обычной годовой ренты можно воспользоваться финансовой функцией MS Excel:**

- 1) ПС();
- 2) ПЛТ();
- 3) КПЕР();
- 4) БС().

**16. Для расчета наращенной суммы обычной годовой ренты можно воспользоваться финансовой функцией MS Excel:**

- 1) БС();
- 2) ПЛТ();
- 3) КПЕР();
- 4) НОРМА().

**17. Имеется два инвестиционных проекта на 4 года с объемом первоначальных инвестиций 1000 тыс. руб. каждый. Распределение чистых доходов, тыс. руб., от проектов по годам выглядит следующим образом:**

А: 500; 500; 500; 500

Б: 100; 300; 500; 1100

Какой из проектов выгоднее для инвестора:

- 1) проект А;
- 2) проект Б;
- 3) одинаково выгодны;
- 4) оба не выгодны.

**18. Средняя норма прибыли на инвестиции в 5-летнем проекте, характеризующимся следующими данными: -100, -100, 70, 100, 300, 90 – равна:**

- 1) 56%;
- 2) 30%;
- 3) 76%;
- 4) 50%.

**19. При английском методе расчета процентов:**

- 1) число дней – точное, продолжительность года – 365 дней;
- 2) число дней – приближенное, продолжительность года – 360 дней;
- 3) число дней – точное, продолжительность года – 360 дней;
- 4) число дней – исходя из продолжительности месяцев – 30 дней, продолжительность года – 360 дней.

**20. Какой анализ позволяет провести модель Монте-Карло:**

- 1) анализ чувствительности при изменении не одного, а нескольких параметров одновременно с учетом их взаимосвязи;
- 2) анализ точки безубыточности при изменении нескольких параметров;
- 3) анализ чувствительности при изменении трех параметров одновременно с учетом их взаимосвязи;
- 4) анализ точки безубыточности при изменении наиболее значимого параметра параметров.

**21. На вклад  $P$  начисляются сложные проценты по годовой ставке  $i$ . Величина процентов, начисленных за второй год хранения вклада, составит сумму  $S$ , равную:**

- 1)  $P(1+i)^2 - P$ ;
- 2)  $Pi + Pi^2$ ;
- 3)  $2Pi + Pi^2$ ;
- 4)  $2P(1+i)^2 - P$ ;
- 5)  $P(1+i)^2 - 2P$ .

**22. Непрерывное начисление процентов – это:**

- 1) начисление процентов за бесконечно малые отрезки времени;
- 2) начисление процентов бесконечно долго;
- 3) начисление процентов ежечасно;
- 4) начисление процентов ежеминутно.

**23. Предприятие переводит в Фонд помощи ветеранам труда 400000 рублей в начале каждого второго года. Определите тип ренты, которую образуют платежи:**

- 1) рента пренумерандо с периодом больше года;
- 2) рента постнумерандо с периодом больше года;
- 3) рента пренумерандо  $p$ -срочная;
- 4) рента постнумерандо  $p$ -срочная.

**24. При германском методе расчета процентов:**

- 1) число дней – приближенное, продолжительность года – 360 дней;
- 2) число дней – точное, продолжительность года – 360 дней;
- 3) число дней – исходя из продолжительности месяцев – 30 дней, продолжительность года – 360 дней;
- 4) число дней – точное, продолжительность года – 365 дней.

**25. Современная ценность (приведенная стоимость) инвестиционного проекта – это:**

- 1) сумма приведенных к настоящему времени будущих чистых доходов;
- 2) сумма, которая, будучи помещена в банк, вырастет за определенный период до искомой величины;
- 3) сумма чистых поступлений по проекту;
- 4) сумма приведенных к настоящему времени оттоков денежных средств (инвестиций).

**26. Процентная ставка – это:**

- 1) относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов;
- 2) отношение суммы процентных денег к величине ссуды;
- 3) абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;
- 4) ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах.

**27. Проценты на проценты начисляются в схеме:**

- 1) сложных процентов;
- 2) простых процентов;

- 3) как сложных, так и простых процентов;
- 4) независимо от схемы проценты начисляются только на основной капитал, но не на проценты.

**28. Для расчета размера отдельного платежа обычной годовой ренты можно воспользоваться финансовой функцией MS Excel:**

- 1) ПЛТ();
- 2) ПС();
- 3) КПЕР();
- 4) БС().

**29. Реальная доходность финансовой операции определяется:**

- 1) с использованием эффективной ставки;
- 2) с использованием номинальной ставки процентов;
- 3) с использованием реальной ставки процентов;
- 4) с использованием непрерывной ставки процентов.

**30. Рента описывается следующими параметрами:**

- 1) член ренты, период ренты, срок ренты, процентная ставка;
- 2) член ренты, срок ренты, знак платежей, процентная ставка;
- 3) член ренты, срок ренты, процентная ставка;
- 4) количество членов ренты, период ренты, процентная ставка.

**31. Современная величина годовой обычной ренты постнумерандо определяется по формуле:**

- 1)  $A = R \times (1 - (1+i)^{-n})/i$ ;
- 2)  $A = R \times (1 - (1+i)^n)/(1+i)$ ;
- 3)  $A = R \times ((1+i)^{-n} - 1)/i$ ;
- 4)  $A = R \times (1 + (1+i)^{-n})/i$ .

**32. Современная ценность обычной годовой вечной ренты определяется по формуле:**

- 1)  $PV = R/i$ ;
- 2)  $PV = R \times i/n$ ;
- 3)  $PV = R/(1+i)^m$ ;
- 4)  $PV = R \times (1+i)^n$ .

**33. Допустим, что годовые ставки начисления простого и сложного процента одинаковы. Сравнить результаты начисления в зависимости от срочности вклада:**

- 1) для долгосрочных депозитов (больше года) сложный процент выгоднее простого;
- 2) в пределах года простой процент «отстает» от сложного;
- 3) сложный процент всегда выгоднее для вкладчика независимо от периода начисления;
- 4) простой процент всегда выгоднее для вкладчика независимо от периода начисления.

**Кулагина Ирина Ивановна**

## **ЗАДАЧНИК ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ**

*Практикум для бакалавров*

*Электронное издание*

Процессор Intel® или AMD с частотой не менее 1.5 ГГц  
Операционная система семейства Microsoft Windows или macOS  
Оперативная память 2 ГБ оперативной памяти  
Пространство на жестком диске 1,68 МБ

Дополнительные программные средства: Программа для просмотра PDF  
Издательско-полиграфический центр ВИУ РАНХиГС  
г. Волгоград, ул. Герцена, 10