Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Волгоградский институт управления – филиал РАНХиГС

Экономический факультет

(наименование структурного подразделения (института/факультета/филиала))

Кафедра информационных систем и математического моделирования

(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕНА

решением кафедры информационных систем и математического моделирования
Протокол от «31» августа 2018 г. № 1

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.8 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

(индекс и наименование дисциплины, в соответствии с учебным планом)

Линейная алгебра

(краткое наименование дисциплины)

по направлению подготовки (специальности)

38.03.01 Экономика

(код и наименование направления подготовки (специальности))

«Финансы и кредит»

(направленность(и) (профиль (и)/специализация(ии)

Бакалавр

(квалификация)

Очная

(форма(ы) обучения)

Год набора – 2019

Волгоград, 2018 г.

Автор – составитель:

канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры
информационных систем и математического моделирования Савушкин А.Ю.

Заведующий кафедрой

информационных систем и
математического моделирования
канд. технических наук, доцент Астафурова О.А.

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

1.1. Дисциплина Б1.Б.8 «Линейная алгебра» обеспечивает овладение следующими компетенциями:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ОПК – 3	Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.	ОПК-3.1.2	Формирование у студентов научного математического мышления, умения применять инструментарий линейной алгебры для исследования экономических процессов и явлений. Развитие понятийной математической базы и формирование определенного уровня математической подготовки, необходимых для решения теоретических и прикладных задач экономики и их количественного и качественного анализа.
		ОПК-3.2.2	Формирование необходимого уровня алгебраической и геометрической подготовки для понимания основ теории вероятностей и математической статистики, эконометрики.

1.2. В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

ОТФ/ТФ (при наличии профстандарта)	Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
Формирование трудовых функций, связанных с разработкой финансового плана для клиента и целевого инвестиционного портфеля, финансовым консультированием по широкому спектру финансовых услуг. (Приказ Минтруда России от 09.03.2015 N 167н).	ОПК-3.1.2	<u>На уровне знаний:</u> Теоретические положения всех разделов дисциплины «Линейная алгебра». Понятийный аппарат линейной алгебры. Язык математики, как универсальный язык науки.
		<u>На уровне умений:</u> Применять алгебраические методы для решения экономических задач. Использовать практические навыки для решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий в их взаимной связи, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования. Осуществлять поиск, сбор и анализ информации, необходимой для решения поставленной экономической задачи. Осуществлять выбор соответствующего алгебраического инструментария, необходимого для проведения расчетов и обработки полученных данных в соответствии с поставленной задачей. Анализировать результаты расчетов, обосновывать полученные выводы.
		<u>На уровне навыков:</u> Алгебраическими методами анализа количественных характеристик изучаемого объекта. Приемами классификации, систематизации знаний на основе логического мышления. Навыками применения современного математического инструментария для анализа полученных данных.
	ОПК-3.2.2	<u>На уровне знаний:</u> Основы алгебраических методов моделирования экономических систем. Основы линейной алгебры, необходимые для решения финансовых и экономических задач.
		<u>На уровне умений:</u> Решать оптимизационные задачи с использованием аппарата линейной алгебры. Использовать понятийный аппарат линейной алгебры как инструмент научного познания и анализа, для исследования математических моделей в экономике.
		<u>На уровне навыков:</u> Методикой построения, анализа и применения алгебраических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических процессов.

2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина Б1.Б.8 «Линейная алгебра» входит в математический и естественнонаучный учебный цикл, являясь обязательной дисциплиной учебного плана. Освоение дисциплины базируется на знаниях, полученных при изучении школьного курса математики, в свою очередь «Линейная алгебра» является основой при изучении таких дисциплин, как Б1.Б.7 «Математический анализ», Б1.Б.9 «Теория вероятностей и математическая статистика», Б1.Б.13 «Эконометрика», Б1.Б.10 «Методы оптимальных решений».

В соответствии с учебным планом дисциплина изучается в течение первого и второго семестров общим объемом 216 часов (6 ЗЕТ). По очной форме обучения на контактную работу с преподавателем запланировано 92,8 часов, на самостоятельную работу – 77,2 часа и на контроль – 46 часа.

Формами промежуточной аттестации являются зачет + контрольная работа в первом семестре, экзамен + контрольная работа во втором семестре по завершению изучения курса.

3. Содержание и структура дисциплины «Линейная алгебра»

Структура дисциплины

Наименование тем	Объем дисциплины, час.						Форма текущего контроля успеваемости[1], промежуточной аттестации
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СР	
		Л	ПЗ	ЛР	КСР		
Очная форма обучения							
I – семестр							
Тема 1. Элементы матричной алгебры.	8	2	2	–	–	4	О, РЗ
Тема 2. Элементы теории определителей. Обратная матрица.	14	4	4	–	–	6	О, РЗ
Тема 3. Ранг матрицы.	8	2	2	–	–	4	О, РЗ
Тема 4. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод решения.	10	2	2	–	–	6	О, РЗ
Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение по формулам Крамера. Метод Гаусса.	10	4	2	–	–	4	О, РЗ, Т
Тема 6. Исследование систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.	10	2	2	–	–	5,6	Кр
Тема 7. Линейные пространства. Линейный оператор. Собственные числа и собственные значения линейного оператора. Квадратичные формы.	12	4	2,4	–	–	6	О, РЗ
Промежуточная аттестация							Зачет
ИТОГО за I семестр	72	20	16,4			35,6	
II – семестр							
Тема 8. Линейное программирование как раздел математического программирования.	8	2	2	–	–	4	О, РЗ, РК
Тема 9. Геометрическое решение задачи линейного программирования.	6	2	2	–	–	2	О, РЗ, РК
Тема 10. Симплекс метод решения производственной задачи.	10	2	4	–	–	4	О, РЗ, РК

Наименование тем	Объем дисциплины, час.						Форма текущего контроля успеваемости[1], промежуточной аттестации
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СР	
		Л	ПЗ	ЛР	КСР		
Тема 11. Транспортная задача линейного программирования.	10	2	4	–	–	4	О, РЗ, Кр
Тема 12. Комплексные числа.	6	2	4	–	–	2	О, РЗ
Тема 13. Аналитическая геометрия. Элементы векторной алгебры.	10	2	4	–	–	4	О, РЗ
Тема 14. Прямая на плоскости.	10	2	4	–	–	4	О, РЗ,
Тема 15. Кривые второго порядка.	10	2,4	4	–	–	2,6	О, РЗ, Т
Тема 16. Векторы в пространстве. Векторное произведение. Смешенное произведение. Геометрические интерпретации.	10	2	4	–	–	2	О, РЗ
Тема 17. Прямая и плоскость в пространстве.	10	4	4	–	–	2	Кр
Промежуточная аттестация	54			–	–		**Экзамен**
ИТОГО за II семестр:	144	22,4	36	–	–	41,6	46
ИТОГО за курс:	**216**	**40,4**	**52,4**	–	–	**77,2**	**46**

Примечание: 1 – формы текущего контроля успеваемости: опрос (О), тестирование (Т), контрольная работа (Кр), решение задач (РЗ), решение кейсов (РК).

Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание тем (разделов)
Тема 1.	Элементы матричной алгебры.	Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц. Транспонирование матриц.
Тема 2.	Элементы теории определителей. Обратная матрица.	Определители второго и третьего порядка. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Формула Лапласа разложения определителя по элементам какого-либо столбца или строки. Понятие об определителе n-го порядка. Определение обратной матрицы. Вырожденная матрица, невырожденная матрица. Алгоритм поиска.
Тема 3.	Ранг матрицы.	Определение ранга матрицы. Методы вычисления ранга матрицы: метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований. Линейная зависимость строк (столбцов). Теорема о ранге.
Тема 4.	Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод решения.	Системы линейных уравнений. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы. Определенные и неопределенные системы. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение методом обратной матрицы.
Тема 5.	Системы линейных алгебраических уравнений. Решение по формулам Крамера. Метод Гаусса.	Неособые системы линейных уравнений. Разрешение по формулам Крамера. Универсальный аналитический метод решения систем – метод последовательного исключения неизвестных (Гаусса). Алгоритм метода.
Тема 6.	Исследование систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.	Критерий совместности систем линейных алгебраических уравнений. Ранг расширенной матрицы. Решение неопределенных систем. Понятие базисных переменных и базисного решения системы.
Тема 7.	Линейные пространства. Линейный оператор. Собственные числа и собственные значения линейного оператора. Квадратичные формы.	Понятие линейного пространства. $\boldsymbol{n}$ – мерное векторное линейное пространство. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Собственные числа и собственные значения линейного оператора. Квадратичные формы. Матрича квадратичной формы. Критерии знакоопределенности. Критерий Сильвестра.

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание тем (разделов)
Тема 8.	Линейное программирование как раздел математического программирования.	Общая характеристика и примеры задач линейного программирования. Экономико-математическая модель производственной задачи. Теоретические основы исследования и решения задачи линейного программирования. Элементы теории выпуклых множеств. Матричная модель производственной задачи.
Тема 9.	Геометрическое решение задачи линейного программирования.	Геометрическое решение линейных неравенств на плоскости. Область допустимых решений. Градиент целевой функции. Алгоритм графического решения задач линейного программирования. Особенности графического метода.
Тема 10.	Симплекс метод решения производственной задачи.	Метод последовательного улучшения опорного плана. Критерий оптимальности. Цикл пересчета. Симплекс – таблицы. Алгоритм построения и расчета таблиц. Дополнительные переменные. Каноническая модель задачи.
Тема 11.	Транспортная задача линейного программирования.	Экономико–математическая модель транспортной задачи. Построение исходного опорного плана транспортной задачи *(метод северо-западного угла, метод наименьшей стоимости)*. Алгоритм решения закрытой транспортной модели методом потенциалов. Особенности, возникающие при решении задачи: открытая модель, вырожденный план.
Тема 12.	Комплексные числа.	Комплексные числа и их представление. Операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Формула Муавра. Формула Эйлера. Области на комплексной плоскости.
Тема 13.	Аналитическая геометрия. Элементы векторной алгебры.	Декартова система координат на плоскости. Векторы. Действия с векторами. Скалярное произведение. Координатные методы решения геометрических задач.
Тема 14.	Прямая на плоскости.	Декартова прямоугольная система координат (точка на плоскости, расстояние между двумя точками, угловой коэффициент прямой, угол между двумя прямыми). Прямая на плоскости (различные виды уравнений прямой на плоскости, исследование общего уравнения прямой, пересечение двух прямых, расстояние от точки до прямой).

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание тем (разделов)
Тема 15.	Кривые второго порядка.	Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Канонические уравнения. Основные свойства.
Тема 16.	Векторы в пространстве. Векторное произведение. Смешенное произведение. Геометрические интерпретации.	Векторы в пространстве. N-мерное пространство, N-мерные векторы и операции над ними. Геометрические векторы, прямоугольная система координат, проекция вектора на ось, операции над векторами, заданными в координатной форме, линейная зависимость векторов, базис. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Геометрическое истолкование. Преобразование прямоугольной системы координат.
Тема 17.	Прямая и плоскость в пространстве.	Определение вектора в пространстве. Декартовы координаты вектора в пространстве. Базис в пространстве. Разложение вектора по базису. Векторное произведение. Геометрическое истолкование. Смешанное произведение векторов, геометрический смысл. Уравнение плоскости проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости проходящей через три точки. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Параметрическое и каноническое уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки. Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Самостоятельная работа студентов при изучении дисциплины.

Самостоятельная работа является неотъемлемым элементом учебного процесса. При самостоятельной работе достигается конкретное усвоение учебного материала, развиваются теоретические способности, столь важные для современной подготовки специалистов. Формы самостоятельной работы студентов по дисциплине: написание конспектов, подготовка ответов к вопросам, написание рефератов, решение кейсов, выполнение контрольной работы.

Самостоятельная работа студентов по дисциплине Б3.Б.8 «Линейная алгебра» включает следующие виды работ:

Таблица 4

№ п/п	Тема	Вопросы, выносимые на СРС	Форма контроля	
			Очная форма	**Заочная форма**
1.	Матричная алгебра.	1. Основные определения: матрица прямоугольная и квадратная, матрица-строка и матрица-столбец, нулевая и единичная матрица. 2. Определитель матрицы, матрицы особенные и не особенные. 3. Присоединённая матрица. 4. Действия над матрицами: произведение матрицы на число, сумма (разность) матриц, произведение двух матриц. 5. Обратная матрица: её вычисление, проверка правильности нахождения и единственность.	О, РЗ	О, РЗ
2.	Теория определителей.	1. Понятие определителя. 2. Определители второго порядка, их получение, вычисление и свойства. 3. Определители третьего порядка. 4. Миноры и алгебраические дополнения. 5. Определители любого порядка, удобные определители. 6. Теоремы замещения и аннулирования. 7. Основные свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. Формула Лапласа. 8. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Линейная зависимость строк (столбцов). Базисный минор.	О, РЗ	О, РЗ

№ п/п	Тема	Вопросы, выносимые на СРС	Форма контроля	
			Очная форма	Заочная форма
3.	Элементы векторной алгебры.	1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Свойства векторов. Базис. Линейная зависимость векторов. 2. Система координат. Ортонормированный базис. Линейные операции над векторами в координатах. Скалярное произведение векторов. 3. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл.	О, РЗ	О, РЗ
4.	Прямая на плоскости.	1. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой по точке и вектору нормали. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки. 2. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Параметрическое уравнение прямой. 3. Взаимное расположение прямых. Угол между прямыми на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.	О, РЗ, Т	О, РЗ, Т
5.	Кривые второго порядка. Поверхности второго порядка.	1. Уравнение линии на плоскости. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. 2. Гипербола. Парабола. Полярная система координат. 3. Классификация поверхностей второго порядка. Геометрические характеристики.	О, РЗ	О, РЗ

№ п/п	Тема	Вопросы, выносимые на СРС	Форма контроля	
			Очная форма	Заочная форма
6.	Прямая и плоскость в пространстве.	1. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки. Уравнение плоскости по 2 точкам и вектору, коллинеарному плоскости. Уравнение плоскости по точке и 2 векторам, коллинеарным плоскости. Уравнение плоскости по точке и вектору нормали. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости в векторной форме. Расстояние от точки до плоскости. 2. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. 3. Взаимное расположение прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми.	Кр	Кр

№ п/п	Тема	Вопросы, выносимые на СРС	Форма контроля	
			Очная форма	Заочная форма
7.	Линейное (векторное) пространство.	1. Свойства линейных пространств. Линейные преобразования. Матрицы линейных преобразований. Собственные значения и собственные векторы линейных преобразований. Характеристическое уравнение. 2. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Критерии знакоопределенности квадратичных форм. 3. Преобразование координат. Матрица линейного оператора в новом базисе. 4. N-мерное арифметическое пространство. 5. N-мерные векторы и операции над ними. 6. Понятие о линейных пространствах. 7. Геометрические векторы и операции над ними. 8. Проекция вектора на ось. 9. Прямоугольная декартова система координат в пространстве. 10. Разложение вектора по координатным осям. 11. Операции над векторами, заданными в координатной форме. 12. Линейная зависимость векторов. Размерность векторного пространства. Базис.	О, РЗ	О, РЗ
8.	Комплексные числа.	1. Формы записи комплексного числа. Алгебраическая. Тригонометрическая. Показательная форма. 2. Действия с комплексными числами. Формула Муавра. Уравнение Эйлера. 3. Задание области на комплексной плоскости.	О, РЗ	О, РЗ

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th rowspan="2">Тема</th><th rowspan="2">Вопросы, выносимые на СРС</th><th colspan="2">Форма контроля</th></tr>
<tr><th>Очная форма</th><th>Заочная форма</th></tr>
<tr><td>9.</td><td>Поверхности второго порядка.</td><td>1. Цилиндрические поверхности: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.
2. Поверхности вращения: эллипсоид вращения, однополостный гиперболоид вращения, двуполостный гиперболоид вращения, параболоид вращения.
3. Цилиндрическая и сферическая системы координат.</td><td>О, РЗ</td><td>О, РЗ</td></tr>
</table>

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

4.1.1. В ходе реализации дисциплины используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

- ✓ – при проведении занятий лекционного типа: тестирование, опрос;
- ✓ – при проведении практических занятий: устный опрос, решение задач, тестирование, кейс – задачи.

Текущая аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в форме оценки и анализа результатов выполнения студентами соответствующих практических заданий, контрольных работ и тестов по соответствующим темам курса.

<u>Объектами оценивания выступают:</u>

- ◇ учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- ◇ степень усвоения теоретических знаний;
- ◇ уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
- ◇ результаты самостоятельной работы.

<u>Фонд текущего контроля включает:</u>

- → теоретический опрос;
- → решение типовых задач;
- → тестирование;
- → решение кейс – задач;
- → выполнение контрольных работ.

4.1.2. Промежуточные аттестации проводится в формах: **зачета + контрольная работа** (1 – семестр), **экзамена + контрольная работа** (2 – семестр)**.**

К сдаче экзамена по дисциплине допускаются студенты, получившие не меньше 60 баллов при текущей аттестации. При подготовке к экзамену студент внимательно просматривает вопросы, предусмотренные рабочей программой, и знакомиться с рекомендованной основной литературой. Основой для сдачи экзамена студентом является изучение конспектов обзорных лекций, прослушанных в течение семестра, информация, полученная в результате самостоятельной работы, и практические навыки, освоенные при решении задач в течение семестра.

4.2. Материалы текущего контроля успеваемости.

Практические задания по темам.

Тема 1.

Рассматриваемые вопросы:

1. Определение матрицы. Виды матриц.
2. Умножение матрицы на число. Алгебраическая сумма матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Умножение матриц. Некоммутативность произведения.
5. Определители второго и третьего порядков.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Транспонировать матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Умножить матрицу на число

$$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\quad 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Сложение и вычитание матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 15 & -4 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 0 \\ -13 & -1 \\ 24 & 5 \end{pmatrix},\quad -2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Умножение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & -9 & -15 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 22 \\ -3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 3x+y+2z \\ x-y \end{pmatrix}.$$

5. Для заданной матрицы А вычислить E + A + A^2 + A^3:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{б) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определители по определению:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ 2)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10;\ 3)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12;\ 4)\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 72;\ 5)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

7. Вычислить определители по правилу Саррюса:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 10;\ 2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ 3)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$4)\begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7;\ 5)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Тема 2.

Рассматриваемые вопросы:

1. Определители четвертого порядка.
2. Применение основных свойств вычисления определителей для квадратных матриц произвольной размерности.
3. Алгебраические дополнения. Формула Лапласа.
4. Элементарные преобразования определителей.
5. Обратная матрица.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Вычислить определители при помощи разложения на по любой строке или столбцу:

$$a)\begin{vmatrix} 9 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8;\ b)\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6;\ c)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 71;$$

$$d)\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=4;\ e)\begin{vmatrix}1 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=-6;\ f)\begin{vmatrix}5 & -2 & 2 & 5\\ 1 & 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1 & 6\end{vmatrix}=0;$$

2. Вычислить определитель, упростив его элементарными преобразованиями:

$$a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad b)\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ -4 & -3 & 1 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=32;$$

$$c)\begin{vmatrix}3 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=0;\quad d)\begin{vmatrix}4 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 5 & 2\end{vmatrix}=12.$$

3. Найти обратные матрицы

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & 1 & 5\\ 3 & -1 & -1\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

4. Используя обратную матрицу, найти неизвестную матрицу X из матричного уравнения.

1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad X=\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}$;

2) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$ $\qquad X=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$;

$$3)\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$4)\ X\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11 & 3\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & 16\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Найти обратные матрицы и проверить результат умножением на исходную.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{104}\begin{pmatrix}13 & -13 & 26\\ 4 & 12 & -16\\ -7 & 31 & 2\end{pmatrix};$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}.$$

Тема 3.

Рассматриваемые вопросы:

1. Главный минор матрицы. Ранг матрицы.
2. Вычисление ранга: метод элементарных преобразований; метод окаймляющих миноров.

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Определите ранг следующих матриц:

$$1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad r=2;\quad 2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\quad r=2;\quad 3)\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\quad r=3;$$

$$4)\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\quad r=2;\quad 5)\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad r=2;\quad 6)\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & -2 & 1\\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\quad r=3;$$

$$7)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\quad r=2;\quad 8)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -4 & -6 & 4\\ -3 & 6 & 9 & -6\end{pmatrix}\quad r=1;$$

$$9)\begin{pmatrix}-1&3&3&2&5\\-3&5&2&3&4\\-3&1&-5&0&-7\\-5&7&1&4&1\end{pmatrix}\quad r=3;\quad 10)\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&5\end{pmatrix}\quad r=4;$$

$$11)\begin{pmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{pmatrix}\quad r=2;\quad 12)\begin{pmatrix}3&2&-1&2&0&1\\4&1&0&-3&0&2\\2&-1&-2&1&1&-3\\3&1&3&-9&-1&6\\3&-1&-5&7&2&-7\end{pmatrix}\quad r=3.$$

II. Решить уравнения и неравенства:

$$1)\begin{vmatrix}1&x&x^2\\x&1&x\\x^2&x&1\end{vmatrix}=1;\quad 2)\begin{vmatrix}1&0&-1&x\\2&1&0&1\\-1&-1&1&1\\0&2&1&0\end{vmatrix}=7;\quad 3)\begin{vmatrix}1&x&0&x\\-1&x&0&-2\\0&x&1&1\\-1&x&1&x\end{vmatrix}=0.$$

$$4)\begin{vmatrix}2&x+2&-1\\1&1&-2\\5&-3&x\end{vmatrix}>0;\quad 5)\begin{vmatrix}0&0&x&x\\1&-1&0&1\\1&0&-1&1\\x&x&1&1\end{vmatrix}\le 0;\quad 6)\begin{vmatrix}x&1&-1&1\\-1&-x&1&-1\\1&-1&x&1\\-1&1&-1&-x\end{vmatrix}\le 0.$$

Тема 4.

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие решения системы линейных алгебраических уравнений.
2. Матричный метод решения.
3. Формулы Крамера.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Решить системы уравнений матричным методом и по формулам Крамера.

$$1)\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}\quad x=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix};\qquad 2)\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=1\\3x_1-x_2-2x_3=-4\\2x_1+3x_2-x_3=-6\end{cases}\quad x=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};$$

$$3)\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}\quad x=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix};\qquad 4)\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}\quad x=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix};$$

5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

Тема 5.

Рассматриваемые вопросы:

1. Алгоритм метода Гаусса.
2. Решение в случае определенности системы.
3. Бесконечное множество решений.
4. Несовместность системы.

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Решить системы уравнений методом Гаусса.

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 13 \\ 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 14 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 18x_3 + 5x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5 \\ 8x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

Тема 6.

Рассматриваемые вопросы:

1. Экономико-математическая модель производственной задачи.
2. Стандартная, общая и каноническая формы постановки производственной задачи.
3. Целевая функция. Анализ области допустимых решений (системы ограничений задачи).
4. Нахождение области допустимых решений системы линейных ограничений.
5. Нахождение постоянных уровней функции цели.
6. Направление возрастания целевой функции. Градиент функции. Геометрическое истолкование.
7. Геометрическое нахождение оптимального решения основной задачи линейного программирования.
8. Геометрическое представление единственного оптимального плана.
9. Геометрическая интерпретация множества оптимальных решений.
10. Геометрическая иллюстрация отсутствия оптимального решения из-за неограниченности функции цели.

Практические задания:

I. Решить графически систему линейных неравенств и найти координаты его угловых точек.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 8 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 - 6 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

II. Предприятие выпускает два вида продукции A и D. На изготовление единицы изделия A требуется затратить a_1 *кг.* сырья первого типа, a_2 *кг.* сырья второго типа и a_3 *кг.* сырья третьего типа. На изготовление единицы изделия D требуется затратить d_1 *кг.* сырья первого типа, d_2 *кг.* сырья второго типа и d_3 *кг.* сырья третьего типа. Производство обеспечено сырьём каждого типа в количестве b_1 *кг.*, b_2 *кг.*, b_3 *кг.* Стоимость единицы изделия A составляет c_1 *тыс. ден. ед.*, а единицы изделия D – c_2 *тыс. ден. ед.* Составить план производства изделий A и D, обеспечивающий максимальную сумму от их реализации. Решить задачу геометрически.

Задача 1.
$a_1 = 2$ *кг*; $d_1 = 5$ *кг*; $b_1 = 432$ *кг*; $c_1 = 34$ *тыс. руб.*
$a_2 = 3$ *кг*; $d_2 = 4$ *кг*; $b_2 = 424$ *кг*; $c_2 = 50$ *тыс. руб.*
$a_3 = 5$ *кг*; $d_3 = 3$ *кг*; $b_3 = 582$ *кг.*

Задача 2.
$a_1 = 4$ *кг*; $d_1 = 1$ *кг*; $b_1 = 240$ *кг*; $c_1 = 40$ *тыс. руб.*
$a_2 = 2$ *кг*; $d_2 = 3$ *кг*; $b_2 = 180$ *кг*; $c_2 = 30$ *тыс. руб.*
$a_3 = 1$ *кг*; $d_3 = 5$ *кг*; $b_3 = 251$ *кг.*

Задача 3.
$a_1 = 2$ *кг*; $d_1 = 7$ *кг*; $b_1 = 560$ *кг*; $c_1 = 55$ *тыс. руб.*
$a_2 = 3$ *кг*; $d_2 = 3$ *кг*; $b_2 = 300$ *кг*; $c_2 = 35$ *тыс. руб.*
$a_3 = 5$ *кг*; $d_3 = 1$ *кг*; $b_3 = 332$ *кг.*

Задача 4.
$a_1 = 1$ *кг*; $d_1 = 3$ *кг*; $b_1 = 300$ *кг*; $c_1 = 52$ *тыс. руб.*
$a_2 = 3$ *кг*; $d_2 = 4$ *кг*; $b_2 = 477$ *кг*; $c_2 = 39$ *тыс. руб.*
$a_3 = 4$ *кг*; $d_3 = 1$ *кг*; $b_3 = 441$ *кг.*

Тема 7-8.

Рассматриваемые вопросы:

1. Два основных этапа симплексного метода.
2. Аналитический симплекс – метод.
3. Первое опорное решение.
4. Принцип замены базисной переменной на свободную.

5. Второе базисное решение и проверка его на оптимальность.
6. Условие бесконечного множества оптимальных решений.
7. Условие неограниченности целевой функции.
8. Табличная форма симплексного метода.
9. Нахождение в симплекс-таблице ключевого столбца и его роль.
10. Ключевая строка и её назначение.
11. Разрешающий элемент в симплекс-таблице и его использование.
12. Условие неопределённости системы линейных ограничений и количество её решений.
13. Условие несовместимости системы линейных ограничений.
14. Основные правила при составлении и преобразовании симплекс-таблиц.

Практические задания:

I. Предприятие выпускает два вида продукции A и D. На изготовление единицы изделия A требуется затратить a_1 кг. сырья первого типа, a_2 кг. сырья второго типа и a_3 кг. сырья третьего типа. На изготовление единицы изделия D требуется затратить d_1 кг. сырья первого типа, d_2 кг. сырья второго типа и d_3 кг. сырья третьего типа. Производство обеспечено сырьём каждого типа в количестве b_1 кг., b_2 кг., b_3 кг. Стоимость единицы изделия A составляет c_1 тыс. ден. ед., а единицы изделия D – c_2 тыс. ден. ед. Составить план производства изделий A и D, обеспечивающий максимальную сумму от их реализации.

1. Решить задачу аналитическим симплекс-методом.
2. Решить задачу табличным симплекс-методом.

Задача № 1.

$a_1=1$; $d_1=2$; $b_1=10$; $c_1=4$; $\Delta b_1= 2$;
$a_2=3$; $d_2=1$; $b_2=12$; $c_2=6$; $\Delta b_2= 10$;
$a_3=1$; $d_3=1$; $b_3=6$; $\Delta b_3= 3$.

Задача № 2.

$a_1=1$; $d_1=3$; $b_1=12$; $c_1=8$; $\Delta b_1= 5$;
$a_2=2$; $d_2=1$; $b_2=10$; $c_2=6$; $\Delta b_2= 2$;
$a_3=2$; $d_3=2$; $b_3=12$; $\Delta b_3= 4$.

II. Предприятие может производить в сутки изделий типа A не более 120 ед. и не более 360 единиц изделий типа B. При этом рыночный спрос на изделия не превосходит 200 единиц (безразлично какого типа). Стоимость единицы изделия типа A - 4р., а изделия B - 1р. Требуется спланировать выпуск продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

III. Предприятие может изготавливать продукцию двух видов. Суточный расход металла не может превышать 80 кг, при этом на единицу изделия 1-го вида требуется 2 кг металла, а на единицу изделия второго вида – 1 кг. Дневная потребность в продукции 1-го вида не превышает 30 единиц, а для второго вида 40 единиц. Составить план производства, обеспечивающий максимально возможную прибыль, если цены изделий 1-го и 2-го видов составляют соответственно 50 и 30 у.е.

IV. Мебельный цех получает ежедневно 40 досок первого сорта и 19 досок второго сорта. Цех выпускает столы и стулья, при этом на изготовления стола требуется 4 доски первого и 1 доска второго сортов, а на изготовление стула – 1 доска первого и одна доска второго. Прибыль от реализации стола составляет 8 руб., а стула – 6 руб. Какой план производства будет наиболее выгоден цеху.

Тема 9-10.

Рассматриваемые вопросы:

1. Матрица планирования перевозок.
2. Целевая функция транспортной задачи.
3. Полная математическая постановка транспортной задачи.
4. Условие разрешимости транспортной задачи.
5. Метод северо-западного угла.
6. Метод наименьшей стоимости.
7. Вырождение опорного плана поставок.
8. Преодоление вырождения опорного плана и зацикливания.
9. Критерий оптимальности в транспортной задаче.
10. Проверка опорного плана на оптимальность.
11. Потенциалы строк и столбцов.
12. Алгоритм метода потенциалов.
13. Схема перемещения перевозки в незаполненную клетку.
14. Циклы в транспортной задаче и их различные конфигурации.
15. Алгоритм нахождения оптимального плана перевозок транспортной задачи.

Практические задания:

1. В двух пунктах отправления А и В находятся соответственно 150 и 90 т горючего. В пункты 1, 2, 3 требуется доставить соответственно 60, 70 и 110 т горючего. Стоимости перевозки тонны горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 составляют соответственно 6, 10 и 4р., а из пункта В - 12, 2 и 8р. Построить матрицу стоимостей и первоначальный опорный план.
2. Решить транспортную задачу:

Запас (50 20 30) Заказ (30 40 20 10) $C=\begin{pmatrix}2&3&7&8\\5&4&6&1\\3&5&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20&30&-&-\\-&10&-&10\\10&-&20&-\end{pmatrix}\quad F=250$	Запас (30 40 30) Заказ (40 20 10 30) $C=\begin{pmatrix}1&5&1&6\\8&3&7&5\\2&4&9&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20&-&10&-\\-&20&-&20\\20&-&-&10\end{pmatrix}\quad F=260$

3. У трех поставщиков имеется однородный груз в количествах 50, 20 и 30 единиц. Этот груз необходимо доставить четырем потребителям, каждый из которых должен получить соответственно 10, 40, 15 и 35 единиц. Стоимости доставки единицы груза (тарифы) от каждого поставщика A_i (i =1, 2, 3) всем потребителям B_j (j = 1, 2, 3, 4) заданы матрицей C=(c_{ij}): $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными затратами.

Ответ: X = $\begin{pmatrix} - & 20 & - & 30 \\ - & 20 & - & - \\ 10 & - & 15 & 5 \end{pmatrix}$. Целевая функция равна: F(X)= 285.

4. У трех поставщиков имеется однородный груз в количествах 70, 60 и 100 единиц. Этот груз необходимо доставить четырем потребителям, каждый из которых должен получить соответственно 80,100, 20 и 30 единиц. Стоимости доставки единицы груза (тарифы) от каждого поставщика A_i (i =1, 2, 3) всем потребителям B_j (j = 1, 2, 3, 4) заданы матрицей C=(c_{ij}): $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$. Составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными затратами.

Ответ: X = $\begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 30 \\ 10 & 70 & 20 & 0 \end{pmatrix}$. Целевая функция равна: F(X)= 670.

5. На трех складах оптовой базы имеется однородный груз в количествах 40, 80 и 80 единиц. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина, каждый из которых должен получить соответственно 70 ,20 , 60 и 60 единиц. Стоимости доставки единицы груза (тарифы) из каждого склада A_i (i =1, 2, 3) во все магазины B_j (j = 1, 2, 3, 4) заданы матрицей C=(c_{ij}): C = $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными затратами.

Ответ: X = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 20 \\ 60 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Целевая функция равна: F(X)= 520.

Тема 11.

Рассматриваемые вопросы:

1. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма записи.
2. Арифметические операции с комплексным числом в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
3. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула перехода от алгебраической формы.

4. Арифметические операции с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
5. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.

1. Выполнить указанные действия с комплексными числами:

1.1. $\frac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$; 1.2. $\frac{3+4i}{i}+\frac{4-i}{3+2i}$; 1.3. $\frac{(2+3i)\cdot(5-i)}{2+i}$;

1.4. $(1-2i)^3-\frac{4i}{4-3i}$; 1.5. $1-i^5+i^{10}-i^{15}+\cdots+i^{50}$; 1.6. $(2i-1)^4-(2i+1)^4$;

1.7. $\frac{2-i}{1+3i}-\frac{1+3i}{2-i}$; 1.8. $\frac{1+i}{i}$; 1.9. $\left(\frac{1-3,5i}{-7-2i}\right)^{-4}$; 1.10. $\frac{1+2i}{3-i}\cdot(1-i)^2$.

2. Записать в тригонометрической и показательных формах комплексные числа:

2.1. $z=-1+\sqrt{3}i$; 2.2. $z=-1-i$; 2.3. $z=\sqrt{3}-i$; 2.4. $z=-i$;

2.5. $z=-1-\sqrt{3}i$; 2.6. $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2.7. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2.8. $z=1-\sqrt{3}i$;

2.9. $z=1+i$; 2.10. $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$; 2.11. $z=-\sin(\pi/3)+i\cos(\pi/3)$;

2.12. $z=2\cos(\pi/3)-2i\sin(\pi/3)$.

3. Вычислить, при необходимости записав комплексное число в тригонометрической форме:

3.1. $(1+i)^{10}$; 3.2. $(-1+i)^5$; 3.3. $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{12}$ 3.4. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 3.5. $\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i(1+i)^{24}}$.

4. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

4.1. $z^2-4z+8=0$; 4.2. $3z^2-z+2=0$; 4.3. $z^2-6z+25=0$; 4.4. $z^4-z^3+2z^2-z+1=0$.

5. Найти все значения корня:

5.1. $\sqrt[3]{1}$; 5.2. $\sqrt[3]{-i}$; 5.3. $\sqrt{i}$.

Формулы для перехода от алгебраической формы к тригонометрической таковы:

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2};\quad \arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x),\ x>0;\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi,\ x<0,\ y>0;\\ \operatorname{arctg}(y/x)-\pi,\ x<0,\ y<0;\\ \pi/2,\ x=0,\ y>0;\\ -\pi/2,\ x=0,\ y<0;\\ 0,\text{если } x>0,\ y=0;\\ \pi,\text{если } x<0,\ y=0.\end{cases}$$

Тема 12-13.

Рассматриваемые вопросы:

1. Вектор. Линейные операции над векторами.
2. Базис. Система координат. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.
3. Векторное произведение векторов. Свойства векторного произведения. Геометрический смысл векторного произведения.
4. Смешанное произведение векторов. Свойства. Геометрический смысл.

Практические задания:

1. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки: A(2;-3), B(3;2) и C(-2;5).
2. Площадь треугольника равна 10 кв. ед., две его вершины – точки A(5;1), B(-2;2). Найдите координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси абсцисс.
3. Точки A(-2;1), B(2;3) и C(4;-1) – середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.
4. Площадь треугольника равна 3 кв. ед., две его вершины – точки A(3;1), B(1;-3). Найдите координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.
5. Три вершины параллелограмма – точки A(3;7), B(2;-3) и C(-1;4). Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
6. Прямая проходит через точки M(2;-3) и N(-6;5). Найти на этой прямой точку, ордината которой равна –5.
7. Прямая проходит через точки A(7;-3) и B(23;-6). Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.
8. Написать разложение вектора x по векторам $\mathrm{p}, \ \mathrm{q}, \ \mathrm{r}$.

   $x = \{-2, \ 4, \ 7\}, \quad \mathrm{p} = \{0, \ 1, \ 2\}, \quad \mathrm{q} = \{1, \ 0, \ 1\}, \quad \mathrm{r} = \{-1, \ 2, \ 4\}.$
9. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2, построенные по векторам a и b?

   $\mathrm{a} = \{1, \ -2, \ 3\}, \quad \mathrm{b} = \{3, \ 0, \ -1\}, \quad \mathrm{c}_1 = 2\mathrm{a} + 4\mathrm{b}, \quad \mathrm{c}_2 = 3\mathrm{b} - \mathrm{a}.$
10. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

    $A(1, \ -2, \ 3), \quad B(0, \ -1, \ 2), \quad C(3, \ -4, \ 5).$
11. Даны векторы $\overline{a} = (-4; -8; 8)$ и $\overline{b} = (4; 3; 2)$. Найти векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.
12. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.
13. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

14. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b};\quad 3\vec{a}+\vec{b}$, если

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1;\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=30^0.$

15. Найти $(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

16. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

17. При каком m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ перпендикулярны.

18. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

19. Задан вектор $\vec{a}=(-1;2;0)$. Вычислить $|\vec{a}|$, $\cos(\vec{a},\vec{j})$. Ответ: $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $\cos(\vec{a},\vec{j})=2/\sqrt{5}$

20. Среди векторов $\vec{a}=(-1;\ 3;\ 5;\ -4)$, $\vec{b}=(4;\ 2;\ 2;\ 3)$ и $\vec{c}=(2;\ -6;\ -10;\ 8)$ найти коллинеарные и ортогональные. Ответ: $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\vec{a}\parallel\vec{c}$; в) $\vec{c}\perp\vec{b}$.

21. Заданы векторы $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ и $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b})$. Ответ: $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}=\left(3;\ \frac{11}{2};\ 0\right)$; $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b})=6$.

22. Найти вектор $\vec{a}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$. Ответ: $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

23. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?
Ответ: $\alpha=-1$; $\beta=4$.

24. Даны векторы: $\vec{a}=(3;\ -1;\ -2)$; $\vec{b}=(1;\ 2;\ -1)$. Найти координаты векторного произведения $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$. Ответ: $(20;\ 4;\ 28)$.

25. Даны три вектора: $\vec{a}=(1;\ -1;\ 3)$, $\vec{b}=(-2;\ 2;\ 1)$, $\vec{c}=(3;\ -2;\ 5)$. Вычислить смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Ответ: –7.

26. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, если $\vec{a}=(2;-1;2)$, $\vec{b}=(1;2;-3)$, $\vec{c}=(3;-4;7)$.
Ответ: Векторы компланарны.

27. Дано, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Определить, при каком значении λ векторы $\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$ и $\vec{a}-\lambda\cdot\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны. Ответ: $\lambda=\pm 3/5$.

28. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

29. Даны четыре точки $A_1(-2;-1;1)$; $A_2(1;0;0)$; $A_3(2;-1;-2)$; $A_4(2;1;1)$. Убедиться, что векторы $\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}$ некомпланарны. Найти объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. *Ответ*: $V=\frac{1}{3}$.

30. Показать, что векторы $\vec{x_1}=(1;0;0)$, $\vec{x_2}=(1;1;0)$, $\vec{x_3}=(1;1;1)$ образуют базис трёхмерного пространства, и найти координаты вектора $\vec{y}=(1;3;1)$ в этом базисе. *Ответ*: $\vec{y}=\{-2;2;1\}$.

31. Даны две точки $A(1; 0; 4)$; $B(2; 3; -1)$ и три вектора $\vec{a} = (2;\ 6;\ -10)$; $\vec{b} = (3;\ 0;\ 1)$; $\vec{c} = (0;\ 5;\ 3)$.

32. Найти длину вектора $\overline{AB}$. 2. Найти угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$. 3. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. 4. Найти объем пирамиды, ребрами которой являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

33. При каком значении k вектора $\vec{a}(2,-1,3,1)$ и $\vec{b}(1,k,2,-3)$ будут ортогональны.

34. Найти вектор $\vec{d}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$, если известно, что его проекция на вектор $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ равна 4. *Ответ*: $\vec{d} = \{-6; 3; 6\}$.

Тема 14.

Рассматриваемые вопросы:

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Нормальное уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно известному вектору.
6. Общее уравнение прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
7. Расстояние от точки до прямой.

Практические задания:

	Обязательный уровень
1.	Даны четыре точки на плоскости: $\boldsymbol{A}(-4;-4)$, $\boldsymbol{B}(-3;2)$, $\boldsymbol{C}(2;5)$, $\boldsymbol{D}(3;-2)$. Найти угол между векторами $\overline{\boldsymbol{AC}}$ и $\overline{\boldsymbol{BD}}$. $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
2.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(1;2)$ параллельно вектору $\vec{\boldsymbol{a}} = \overline{(4;3)}\left[\overline{(2;0)}\right]$. $\{/\,3\boldsymbol{x} - 4\boldsymbol{y} + 5 = 0\,/,/\ \boldsymbol{y} = 2\,/\}$.
3.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(1;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{\boldsymbol{n}} = \overline{(-1;1)}$. $\{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - 2 = 0\}$.
4.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(2;-3)$ перпендикулярно оси абсцисс. $\{\boldsymbol{x} = 2\}$.
5.	Вычислить угол между прямыми $\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 1 = 0$ и $2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 3 = 0$. $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

6.	Вычислить взаимное расположение следующих пар прямых: **a.** $6\boldsymbol{x}-15\boldsymbol{y}+7=0$ и $10\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-1=0$ $\{\perp\}$ **b.** $5\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{y}-4=0$ и $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-13=0$ $\{\times\}$ **c.** $\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+1=0$ и $2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}-1=0$ $\{\parallel\}$**.**
7.	Найти расстояние от точки $\boldsymbol{M}_0(2;-1)$ до прямой $3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-22=0$. Определить координаты проекции точки на данную прямую. $\{\boldsymbol{d}=4\}$.
8.	Дан $\triangle \boldsymbol{ABC}$ с вершинами $\boldsymbol{A}(1;0)$, $\boldsymbol{B}(2;3)$, $\boldsymbol{C}(3;1)$. Вычислить длину перпендикуляра $\boldsymbol{BD}$, опущенного из вершины $\boldsymbol{B}$ на сторону $\boldsymbol{AC}$. $\{\sqrt{5}\}$.
9.	Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку $\boldsymbol{A}(2;1)$, одна из которых параллельна прямой $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+2=0$, а другая перпендикулярна этой прямой. $\{/3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}-4=0/,/2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-7=0/\}$.
10.	Найти расстояние между прямыми $3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-24=0$ и $3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}+6=0$. $\{\boldsymbol{d}=6\}$.
11.	Даны уравнения сторон $\triangle \boldsymbol{ABC}$: $3\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+24=0/\boldsymbol{AB}/$, $4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+32=0/\boldsymbol{BC}/$, $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-4=0/\boldsymbol{AC}/$. Составить уравнение высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины $\boldsymbol{B}$, и найти их длины. $\{/\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+8=0,4\sqrt{5}/,/2\boldsymbol{x}-11\boldsymbol{y}+16=0,5\sqrt{5}/,/\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}+8=0,\frac{20\sqrt{2}}{3}/\}$.
12.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{A}(2;3)$: а) параллельно оси $\boldsymbol{Ox}$; б) параллельно оси $\boldsymbol{Oy}$; с) составляющей с осью абсцисс угол 45°. $\{\boldsymbol{y}=3,\boldsymbol{x}=2,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+1\}$.
13.	Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+1=0$ и $3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-2=0$ параллельно и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+1$. $\{/\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=0/,/\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-2=0/\}$.
14.	Найти длину и уравнение высоты $\boldsymbol{BD}$ в треугольнике с вершинами $\boldsymbol{A}(-3;0)$, $\boldsymbol{B}(2;5)$, $\boldsymbol{C}(3;2)$. $\{\sqrt{10},3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-11=0\}$.
15.	Найти уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{A}(4;3)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед. $\{\frac{\boldsymbol{x}}{4}+\frac{2\boldsymbol{y}}{3}=1\}$.
16.	Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-2$ и $\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+6=0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей. $\{/\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2=0/,/\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}-6=0/,/\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=0/,/\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=0/\}$.

Дополнительные задачи.	
17.	Площадь $\triangle \boldsymbol{ABC}$ $\boldsymbol{S}=8$ кв. ед. Две его вершины суть точки $\boldsymbol{A}(1;-2)$, $\boldsymbol{B}(2;3)$, а третья вершина $\boldsymbol{C}$ принадлежит второй четверти и лежит на прямой $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-2=0$. Определить координаты вершины $\boldsymbol{C}$. $\{\boldsymbol{C}(-1;4)\}$.
18.	Найти проекцию точки $\boldsymbol{P}(-6;4)$ на прямую $4\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+3=0$. Найти расстояние от точки до прямой. $\{(-2;-1),\sqrt{41}\}$.
19.	Найти точку $\boldsymbol{Q}$, симметричную точке $\boldsymbol{P}(-5;13)$ относительно прямой $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-3=0$. $\{(11;-11)\}$.
20.	Даны две точки: $\boldsymbol{P}(2;3)$, $\mathrm{Q}(-1;0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку $\boldsymbol{P}\mathrm{Q}$. $\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1=0\}$.
21.	Даны вершины треугольника $\boldsymbol{A}(1;-1)$, $\boldsymbol{B}(-2;1)$, $\boldsymbol{C}(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины $\boldsymbol{A}$ на медиану, проведенную из вершины $\boldsymbol{B}$. $\{4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-3=0\}$.
22.	Через точки $\boldsymbol{M}_1(-1;2)$, $\boldsymbol{M}_2(2;3)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат и углы, которые образует прямая с осями координат. $\{(-7;0),(0;\frac{7}{3})\}$.
23.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{P}(3;5)$ на одинаковых расстояниях от точек $\boldsymbol{A}(-7;3)$, $\boldsymbol{B}(11;-15)$. $\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-8=0, 11\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-28=0\}$.
24.	Даны вершины треугольника $\boldsymbol{A}(1;-2)$, $\boldsymbol{B}(5;4)$, $\boldsymbol{C}(-2;0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине $\boldsymbol{A}$. $\{5\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-3=0, \boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}-11=0\}$.
25.	Дана прямая $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(2;1)$ под углом 45° к данной прямой и образующей острый угол с осью абсцисс. $\{\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+3=0\}$.
26.	Через точку пересечения прямых $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-1=0$ и $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+4=0$ провести прямую перпендикулярную прямой $3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+7=0$. $\{\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+11=0\}$.
27.	Найти внутренние углы треугольника с вершинами: $\boldsymbol{A}(1;1)$, $\boldsymbol{B}(2;3)$, $\boldsymbol{C}(5;-1)$.
28.	На плоскости заданы две точки: $\boldsymbol{M}(3;2)$, $\boldsymbol{N}(5;-2)$. На оси абсцисс найти такую точку $\boldsymbol{P}$, чтобы $\angle \boldsymbol{MNP}$ был прямым. Записать уравнение высоты, проведенной из точки $\boldsymbol{P}$.

29.	Составить уравнение биссектрисы угла, образованного двумя прямыми $\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+5=0$ и $3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-2=0$. $\{4\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+3=0, 2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-7=0\}$.
30.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}-8=0$ и $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+5=0$ под углом 45° к прямой $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-7=0$. Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых. $\{\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+13=0, 5\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+13=0\}$.

Тема 15.

Рассматриваемые вопросы:

1. Окружность. Основные свойства.
2. Эллипс. Основные свойства.
3. Гипербола. Основные свойства.
4. Парабола. Основные свойства.

Практические задания:

I. <u>Окружность.</u>

1. Окружность задана уравнением $x^2+y^2-8x+6y+16=0$. Найти центр и радиус окружности.
2. Составить уравнение окружности, если она проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6;-8)$.
3. Найти уравнение окружности, касающейся осей ординат и проходящей через точку $M(4;-2)$.

   Решение: $(x-2)^2+(y+2)^2=4,\ (x-10)^2+(y+10)^2=100$.
4. Найти уравнение окружности с центром в точке $C(-4;5)$ и проходящей через точку $M(-1;1)$.

   Решение: $(x+4)^2+(y-5)^2=25$.
5. Найти уравнение окружности, если концы одного из диаметров имеют координаты $(0;4)$ и $(6;0)$.

   Решение: $(x-3)^2+(y-2)^2=13$.
6. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;5), B(5;-1)$ с центром, расположенном на прямой $x-y-2=0$.

   Решение: $(x-4)^2+(y-2)^2=10$.
7. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;2), B(1;1), C(2;-2)$.

   Решение: $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

II. <u>ЭЛЛИПС.</u>

1. Эллипс задан уравнением $9x^2+25y^2=225$. Найти полуоси эллипса, координаты фокусов и эксцентриситет.
2. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
   A) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось b = 3;
   B) большая полуось a = 6, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$;
   C) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;
   D) расстояние между фокусами равно 6, а $a+b=9$;
   E) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a-b=1$.
3. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, если известно, что эллипс проходит через точки $M_1(4;4\sqrt{5}/5)$ и $M_2(0;6)$.
4. Эллипс проходит через точку $M(-4;\sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=0{,}75$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы точки М.
5. Найти длину хорды эллипса $x^2+2y^2=18$, делящей угол между осями пополам.
6. Ординаты всех точек окружности $x^2+y^2=36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.
7. Определить траекторию точки М, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1;0)$, чем к прямой $x=-4$.

III. ГИПЕРБОЛА.

1. Гипербола задана уравнением $3x^2-4y^2=12$. Найти действительную и мнимую полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.
2. Написать каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:
   A) расстояние между фокусами равно 10, а между вершинами 8;
   B) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$;
   C) расстояние между фокусами равно 20, а уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$;
   D) мнимая полуось равна 4, а расстояние между фокусами 10.
3. Гипербола проходит через точку $M(6;-2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось b =2. Написать её уравнение и найти расстояния от точки М до фокусов.
4. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

5. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2-4y^2=16$, проведенных из точки $A(0;-2)$.
6. Определить траекторию точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x=1$, чем к точке $F(4;0)$.

IV. ПАРАБОЛА.

1. Парабола задана каноническим уравнением $y^2=6x$. Найти координаты фокуса, уравнение директрисы.
2. Написать уравнение параболы:

   А) проходящей через точки (0; 0) и (1; -3) и симметричной относительно оси абсцисс;

   В) проходящей через точки (0; 0) и (2; -4) и симметричной относительно оси ординат.
3. Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы и касающейся её директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.
4. Написать уравнение параболы и уравнение директрисы, если известно, что парабола симметрична относительно оси ***Ox*** и что точка пересечения прямых $y=x$ и $x+y=2$ лежит на параболе.
5. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+4y=0$ и симметрична относительно оси ***Oy***.
6. На параболе $y^2=6x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 4,5.
7. Из вершины параболы $y^2=2px$ проведены всевозможные хорды. Написать уравнение множества середин этих хорд.
8. Написать уравнение множества точек, одинаково удаленных от точки F(0; 2) и от прямой $y=4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат.
9. Написать уравнение множества точек одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x=-4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат.

Тема 16-17.

Рассматриваемые вопросы:

1. Общее уравнение плоскости. Исследование общего уравнения.
2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно вектору.
3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
4. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
5. Уравнения прямой линии в пространстве: прямая как линия пересечения плоскостей, векторное

уравнение прямой, параметрические уравнения прямой, канонические уравнения прямой, уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Практические задания:

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;3;1)$:
   a. Параллельно плоскости Oxy; $\{z-1=0\}$
   b. Ось Oy. $\{x+2z=0\}$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через:
   a. Точку $A(5;-4;6)$, перпендикулярно оси Ox; $\{x-5=0\}$
   b. Параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-1;2;5)$. $\{3x+4y-5=0\}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-2;0;0)$, $M_2(0;4;0)$, $M_3(0;0;5)$. $\{10x-5y-4z+20=0\}$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и линию пересечения плоскостей $2x-y+2z-6=0$ и $3x+2y-z+3=0$. $\{14x+7y-2z+6=0\}$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-3;-2)$ параллельно плоскости $3x-2y+4z-3=0$. $\{3x-2y+4z-1=0\}$

6. Найти величину острого угла между плоскостями $11x-8y-7z-15=0$ и $4x-10y+z-2=0$. $\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

7. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $M(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$. $\{x-2y+2z+24=0, x-2y+2z-6=0\}$

8. Записать каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y-3z+5=0 \end{cases}$. $\left\{\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{3}\right\}$

9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-2;5)$:
   a. Параллельно оси Oz; $\left\{\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-5}{1}\right\}$
   b. Параллельно прямой $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-4z+3=0 \end{cases}$. $\left\{\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{1}\right\}$

10. Найти расстояние от точки $M(-5;4;3)$ до прямой $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{2}$. $\{2\sqrt{10}\}$

11. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0.

12. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор $\vec{\ell}$, определяется формулой $d = \left\| \left[\vec{\ell}, \quad \overrightarrow{AB} \right] \right\| \Big/ \left| \vec{\ell} \right|$.

13. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$:
$A_1(1, \quad 3, \quad 6)$, $A_2(2, \quad 2, \quad 1)$, $A_3(-1, \quad 0, \quad 1)$, $A_4(-4, \quad 6, \quad -3)$.

14. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:
$M_1(-3, \quad 4, \quad -7)$, $M_2(1, \quad 5, \quad -4)$, $M_3(-5, \quad -2, \quad 0)$, $M_0(-12, \quad 7, \quad -1)$.

15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$:
$A(1, \quad 0, \quad -2)$, $B(2, \quad -1, \quad 3)$, $C(0, \quad -3, \quad 2)$.

16. Найти угол между плоскостями: $x - 3y + 5 = 0, \quad 2x - y + 5z - 16 = 0.$

17. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C:
$A(0, \quad y, \quad 0)$, $B(1, \quad 6, \quad 4)$, $C(5, \quad 7, \quad 1)$.

18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти:
    1) тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1;
    2) угол между прямыми CD_1 и A_1D;
    3) расстояние между прямыми CD_1 и A_1D.

19. Составить уравнение плоскости, проходящей через:
    1) т. $M(-2;3;1)$ параллельно плоскости Oxy;
    2) т. $M(-2;3;1)$ и ось ординат.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-4)$ параллельно векторам $\vec{a}(-3;2;-1)$ и $\vec{b}(0;3;1)$.

21. Найти расстояние между прямыми $\ell_1: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ и $\ell_2: \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$. $\{6\}$.

22. Найти расстояние от точки $M(1;1;0)$ до прямой $x = y = z$.

23. Записать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7 = 0, \\ x + 3y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$ $\left\{ \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{13} = \dfrac{z}{9} \right\}$.

24. Определить взаимное расположение прямых:
    1) $\ell_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{3}$ и $\ell_2: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-2}{9}$; [параллельны]
    2) $\ell_3: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ и $\ell_4: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$; [пересекаются]
    3) $\ell_5: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{3}$ и $\ell_6: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$. [скрещиваются]

25. Найти расстояние от точки $M_0(7;9;7)$ до прямой $\ell : \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$. $\{\sqrt{22}\}$

26. Найти точку пересечения прямых $\ell_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ и $\ell_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$. $\{(1;5;2)\}$

27. Даны четыре точки $A_1(-2; -1; 1)$; $A_2(1; 0; 0)$; $A_3(2; -1; -2)$; $A_4(2; 1; 1)$. Найти объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. $\{V=\frac{1}{3}\}$

28. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(10; 6; 6)$; $A_2(-2; 8; 2)$; $A_3(6; 8; 9)$; $A_4(7; 10; 3)$. Найти:
    1) Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
    2) Площадь грани $A_1A_2A_3$;
    3) Объем пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины A_4.

29. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3;\ -2;\ -7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$. $\{2x-3z-27=0\}$.

30. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$. $\{7x-y-5z=0\}$.

31. Две грани куба лежат на плоскостях: P_1: $2x-2y+z-1=0$, $P_2: 2x-2y+z+5=0$. Вычислить объём этого куба. $\{8\}$

32. Найти угол между прямыми: $x=2t+1, y=3t-2, z=-6t+1$ и $\begin{cases}2x+y-4z+2=0\\4x-y-5z+4=0\end{cases}$. $\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

33. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=2,\ (\widehat{\vec{p}\vec{q}})=\pi/6.$

34. Найти угол между плоскостями $\ell_1: x-3y+5=0$, ℓ_2: $2x-y+5z-16=0$.

35. Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $\pi_1: x-2y+3z-4=0,\ \ \pi_2: x+y-5z+9=0$ и параллельной оси абсцисс. $\{3y-8z+13=0\}$.

36. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;0;2)$ и перпендикулярной плоскостям: $\pi_1: x+y+z=0,\ \ \pi_2: y-z=0$. $\{2x-y-z-6=0\}$.

37. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(1;1;1)$:
    1) параллельно оси Oz; $\left\{\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}\right\}$
    2) перпендикулярно оси Oz; $\left\{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}\right\}$
    3) перпендикулярно плоскости Oyz.

38. Написать уравнение прямой, по которой плоскость $x-2y+1=0$ пересекает координатную плоскость Oxz. $\begin{cases}x=-1,\\y=0.\end{cases}$

39. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 3, а ребро основания 4. Найдите угол между теми диагоналями двух боковых граней, которые выходят из противоположных концов смежного им ребра. $\{\cos\varphi=0,04\}$

40. В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M найдите расстояние от точки A до плоскости MCD, если сторона основания $2\sqrt{2}$, а все боковые ребра $\sqrt{13}$.

$$\left\{\frac{12}{\sqrt{22}}\right\}$$

4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации.

4.3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Показатели и критерии оценивания компетенций с учетом этапа их формирования

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ОПК – 3	Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.	ОПК-3.1.2	Формирование у студентов научного математического мышления, умения применять инструментарий линейной алгебры для исследования экономических процессов и явлений. Развитие понятийной математической базы и формирование определенного уровня математической подготовки, необходимых для решения теоретических и прикладных задач экономики и их количественного и качественного анализа.
		ОПК-3.2.2	Формирование необходимого уровня алгебраической и геометрической подготовки для понимания основ теории вероятностей и математической статистики, эконометрики.

Этап освоения компетенции	**Показатель оценивания**	**Критерий оценивания**
ОПК-3.1.2 Формирование у студентов научного математического мышления, умения применять инструментарий линейной алгебры для исследования экономических процессов и явлений. Развитие понятийной математической	Теоретические положения всех разделов дисциплины «Линейная алгебра». Понятийный аппарат линейной алгебры. Язык математики, как универсальный язык науки.	Демонстрация знаний основных теоретических положений в полном объеме
	Применять алгебраические методы для решения экономических задач. Использовать практические навыки для решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий в их взаимной связи, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования. Осуществлять поиск, сбор и анализ информации, необходимой для решения поставленной экономической задачи. Осуществлять	Умение применять знания на практике в полной мере

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
базы и формирование определенного уровня математической подготовки, необходимых для решения теоретических и прикладных задач экономики и их количественного и качественного анализа.	выбор соответствующего алгебраического инструментария, необходимого для проведения расчетов и обработки полученных данных в соответствии с поставленной задачей. Анализировать результаты расчетов, обосновывать полученные выводы.	
	Математическими методами анализа количественных характеристик изучаемого объекта. Приемами классификации, систематизации знаний на основе логического мышления. Навыками применения современного математического инструментария для анализа полученных данных.	Свободное владение навыками анализа и систематизации в выбранной сфере
ОПК-3.2.2 Формирование необходимого уровня алгебраической и геометрической подготовки для понимания основ теории вероятностей и математической статистики, эконометрики.	Основы алгебраических методов моделирования экономических систем. Основы линейной алгебры, необходимые для решения финансовых и экономических задач.	Демонстрация знаний основных теоретических положений в полном объеме
	Решать оптимизационные задачи с использованием аппарата линейной алгебры. Использовать понятийный аппарат линейной алгебры как инструмент научного познания и анализа, для исследования математических моделей в экономике.	Умение применять знания на практике в полной мере
	Методикой построения, анализа и применения алгебраических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических процессов.	Свободное владение навыками анализа и систематизации в выбранной сфере

4.3.2 Типовые оценочные средства

Варианты контрольных работ (примерные задания)

Контрольная работа №1

1. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Найти обратную матрицу и выполнить проверку, умножив ее на исходную.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найти обратную матрицу и выполнить проверку, умножив ее на исходную.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ -3x_1 - 4x_3 = -1 \end{cases}$$

3. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

6. Найти ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа №2

1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$.

2. Доказать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис пространства $\Re^3$ и представить вектор $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов. $\overline{a} = (3, 1, 3)$ $\overline{b} = (2, 1, 0)$ $\overline{c} = (1, 0, 1)$ $\overline{d} = (4, 2, 1)$.

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

4. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного оператора (преобразования) с заданной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа №3

1. Решить производственную задачу графически и табличным симплекс – методом.

1.1. $F(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 \to \max$ Решение: $F_{\max} = 192$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 64 \\ x_1 + 3x_2 \le 72 \\ x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

1.2. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2м^2 материала, а для полки типа В – 3м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В – 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В – 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

Математическая модель задачи: Решение:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \max \qquad F_{\max} = 1750 \quad \{x_1 = 450, x_2 = 100, x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1200\}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 550 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 1200 \\ 12x_1 + 30x_2 \le 9600 \end{cases}$$

2. Решить транспортную задачу.

	B1	B2	B3	B4	Запас
A1	9	5	7	8	60
A2	1	10	9	2	50
A3	2	4	5	3	50
Заказ	20	40	70	30	

$$\text{Решение} \begin{pmatrix} - & 40 & 20 & - \\ 20 & - & 0 & 30 \\ - & - & 50 & - \end{pmatrix} \; F_{\min} = 670$$

Контрольная работа №4

1. Найти и построить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условию $|z + 1 - 3i| = 2$.

2. Для данных комплексных чисел z_1 и z_2 вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 - 2z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{5i^2 z_1 - z_2}{2i - 3z_1 z_2}$.

$z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - i$.

3. Для данного комплексного числа z а) найти $|z|$; б) найти аргумент z; в) записать тригонометрическую форму z; г) вычислить z^{12}; д) найти все значения $\sqrt[3]{z}$ и изобразить их на координатной плоскости: $z = \sqrt{3} + i$.

Контрольная работа №5

1. Вычислить значение выражения: $\left(\dfrac{-1+5i}{(2+3i)\sqrt{2}}\right)^{24}$.

2. Решить квадратное уравнение $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.

3. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(-1;2), B(1;-3),C(4;0). Найти:

3.1. уравнение стороны AD;

3.2. уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;

3.3. длину высоты BK;

3.4. уравнение диагонали BD;

3.5. тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

4. Составить каноническое уравнение: эллипса, если большая полуось равна 5 и координаты одного из фокусов F(4, 0). Найти эксцентриситет.

Контрольная работа №6

1. Решить задачу линейного программирования:

$$F = 2x + y \to \max$$

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ y \le 3 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

2. Найти модуль комплексного числа $z = \dfrac{(1+i)^2(1+2i)}{2+i}$, предварительно упростив.

3. Заданы вершины треугольника: $A(0;3)$, $B(-2;-1)$, $C(4;1)$. Найти:

3.1. уравнение стороны AB;

3.2. уравнение высоты CH;

3.3. длину высоты CH;

3.4. уравнение медианы CM;

3.5. косинус угла между прямыми CM и CH.

4. Составить каноническое уравнение: эллипса, если большая полуось равна 5 и координаты одного из фокусов F(4, 0). Найти эксцентриситет.

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ и ось Oy.

6. Найти расстояние от точки $A(1;0;0)$ до прямой $\ell: \ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{0}$.

7. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*=(1, –3, 2), *B*=(2, –1, –1), *C*=(3, –4, 3), *D*=(3, 4, 5). Найти: длину ребра *AB*; угол между ребрами *AB* и *AD*; уравнение прямой *AB*; уравнение плоскости *ABC*; уравнение высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, объем пирамиды.

Вопросы к зачету:

I. Матрицы.

1. Основные определения: матрица прямоугольная и квадратная, матрица-строка и матрица-столбец, нулевая и единичная матрица.
2. Действия над матрицами: произведение матрицы на число, сумма (разность) матриц, произведение двух матриц, транспонирование.
3. Обратная матрица: её вычисление, проверка правильности нахождения.
4. Ранг матрицы. Методы вычисления ранга матрицы. Теорема о ранге матрицы.

II. Определители.

5. Определители второго порядка, вычисление.
6. Определители третьего порядка Методы вычислений.
7. Миноры и алгебраические дополнения.
8. Свойства определителей.
9. Теоремы замещения и аннулирования.
10. Теорема Лапласа.

III. Системы линейных уравнений.

10. Основные понятия: линейные уравнения, системы линейных уравнений.
11. Решение системы, системы совместные и несовместные, определённые и неопределённые.
12. Эквивалентные преобразования системы линейных уравнений.
13. Метод Гаусса решения системы n линейных уравнений с n переменными: случаи несовместности, неопределённости и определённости системы.
14. Решение систем линейных уравнений в матричной форме (метод обратной матрицы).
15. Формулы Крамера решения системы n линейных уравнений с n переменными.
16. Ранг системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

IV. Линейные операторы. Квадратичные формы.

17. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора.

18. Собственный вектор и собственное число линейного оператора.
19. Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов.
20. Определение квадратичной формы.
21. Матрица квадратичной формы.
22. Критерии знакоопределенности квадратичных форм.

Вопросы к экзамену

1. Элементы матричной алгебры.
2. Элементы теории определителей.
3. Решение и исследование систем линейных уравнений.
4. Линейные операторы.
5. Квадратичные формы.
6. Определение линейного программирования.
7. Экономико-математическая модель производственной задачи.
8. Каноническая, общая и стандартные формы постановки задачи линейного программирования.
9. Теоретические основы решения задачи линейного программирования.
10. Графо - аналитический метод решения задачи линейного программирования.
11. Аналитический симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Основные этапы. Критерий оптимальности опорного плана.
12. Табличная форма симплекс-метода решения задачи линейного программирования.
13. Формулировка транспортной задачи. Матрица планирования перевозок. Целевая функция транспортной задачи. Метод наименьшей стоимости нахождения опорного плана транспортной задачи.
14. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Критерий оптимальности в транспортной задаче. Алгоритм улучшения опорного плана. Цикл пересчета.
15. Определение комплексного числа. Мнимая единица. Комплексная плоскость.
16. Формы записи комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная.
17. Алгебраические операции с комплексными числами: сложение (вычитание), умножение (деление), возведение в степень (извлечение корня).

13\. Метод аналитической геометрии. Система координат. Векторы на плоскости. Коллинеарность векторов. Операции с векторами.

14\. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Расстояние между точками.

15\. Общее уравнение прямой. Каноническое уравнение прямой.

16\. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой «в отрезках», уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору.

17. Нормальный и направляющий векторы прямой. Угол между прямыми. Взаимное расположение двух прямых. Расстояние от точки до прямой.
18. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Канонические уравнения. Основные свойства.
19. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости проходящей через точку перпендикулярно данному вектору. Уравнение плоскости проходящей через три точки.
20. Общее уравнение плоскости. Исследование общего уравнения плоскости.
21. Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум векторам. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
22. Каноническое уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки.
23. Общее уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей. Угол между прямыми.
24. Взаимное расположение прямых в пространстве.
25. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
26. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Шкала оценивания

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при устном ответе во время проведения текущего контроля определяется баллами в диапазоне 0-100 %. Критериями оценивания при проведении устного опроса является демонстрация основных теоретических положений, в рамках осваиваемой компетенции, умение применять полученные знания на практике, овладение навыками анализа и систематизации экономической информации.

При оценивании результатов устного опроса используется следующая шкала оценок:

100% - 90%	Учащийся демонстрирует совершенное знание базовых положений и формирование основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности.
89% - 75%	Учащийся демонстрирует знание большей части базовых положений и формирование основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности
74% - 60%	Учащийся демонстрирует достаточное знание базовых положений и формирование основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности
менее 60%	Учащийся демонстрирует отсутствие знания базовых положений и формирования основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при тестировании во время проведения текущего контроля определяется баллами в диапазоне 0-100 %. Критерием оценивания при проведении тестирования, является количество верных ответов, которые дал студент на вопросы теста. При расчете количества баллов, полученных студентом по итогам тестирования, используется следующая формула:

$$Б = \frac{В}{О} \times 100\% ,$$

где Б – количество баллов, полученных студентом по итогам тестирования;

В – количество верных ответов, данных студентом на вопросы теста;

О – общее количество вопросов в тесте.

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося во время промежуточной аттестации определяется оценками «Отлично» / «Хорошо»/ «Удовлетворительно»/ «Неудовлетворительно».

В соответствии с Положением о структуре и содержании балльно-рейтинговой системы оценки знаний обучающихся в Волгоградском институте управления – филиале ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации» (Утверждено Ученым советом ВИУ РАНХиГС от 20.01.2017 г., Протокол №2):

1. В Волгоградском институте управления - филиале РАНХиГС принята следующая шкала соответствия рейтинговых оценок пятибалльным оценкам:

- ✓ 90-100% - «отлично» (5);
- ✓ 75 - 89% - «хорошо» (4);
- ✓ 60 - 74% - «удовлетворительно» (3);
- ✓ менее 60% - «неудовлетворительно» (2).

Для дисциплин, формой итогового отчета которых является зачет, приняты следующие соответствия: 60% – 100% – «зачтено»; менее 60% – «не зачтено».

2. Установлены следующие критерии оценок:

100% - 95%	студент глубоко понимает пройденный материал, отвечает четко и всесторонне, умеет оценивать факты, самостоятельно рассуждает, отличается способностью обосновывать выводы, разъяснять их в логической последовательности.
94% - 90%	студент глубоко понимает пройденный материал, отвечает четко и всесторонне, умеет оценивать факты, самостоятельно рассуждает, отличается способностью обосновывать выводы и разъяснять их в логической последовательности, но допускает отдельные неточности.
89% - 85%	студент глубоко понимает пройденный материал, отвечает четко и всесторонне, умеет оценивать факты, самостоятельно рассуждает, отличается способностью обосновывать выводы и разъяснять их в логической последовательности, но допускает некоторые ошибки общего характера.
84% - 80%	студент хорошо понимает пройденный материал, но не может теоретически обосновать некоторые выводы.
79% - 75%	студент отвечает в основном правильно, но чувствуется механическое заучивание материала.
74%-70%	в ответе студента имеются существенные недостатки, материал охвачен неполно, в рассуждениях допускаются ошибки.
69% - 65%	ответ студента правилен лишь частично, при разъяснении материала допускаются серьезные ошибки.
64% - 60%	студент имеет общее представление о теме, но не умеет логически обосновать свои мысли.
менее 60%	студент имеет лишь частичное представление о теме.

<u>Промежуточное и итоговое тестирование по курсу «Линейная алгебра»</u>

Банк тестовых заданий

Уравнение прямой на плоскости

Тестовые задания для самоконтроля

1. Укажите верное соответствие между различными видами уравнения прямой и их формой записи.

	ФОРМА ЗАПИСИ
1	$y - y_1 = k(x-x_1)$
2	$Ax + By + C= 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$
3	$y = kx + b$
4	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
5	$Ax + By + Cz = 0$
6	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1;\quad a,b\neq 0$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

☐ Уравнение прямой с угловым коэффициентом k.

☐ Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1\ (x_1, y_1)$ с заданным угловым коэффициентом K.

☐ Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\ (x_1, y_1)$ и $M_2\ (x_2, y_2)$, если $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$.

☐ Общее уравнение прямой.

☐ Уравнение прямой в отрезках.

2. Необходимое и достаточное условие параллельности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:

☐ $k_1 + k_2 = 0$

☐ $k_1 = k_2$

☐ $k_1 \cdot k_2 = +1$

☐ $k_1 \cdot k_2 = -1$

3. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:

☐ $k_1 = k_2$
☐ $k_1 + k_2 = 1$
☐ $k_2 = -\frac{1}{k_1}$
☐ $k_1 + k_2 = -1$

4. Расстояние d от точки M(x_0, y_0) до прямой Ax + By + C = 0 вычисляется по формуле:

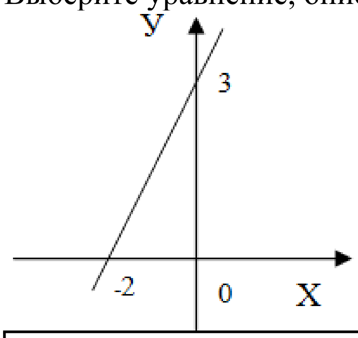
☐ $d=\frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
☐ $d=\sqrt{Ax_0^2 + By_0^2 + C}$

d= $\mid Ax_0 + By_0 + C\mid$
d= $\dfrac{\mid Ax_0 + By_0 + C\mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

5. Угловым коэффициентом прямой называется ______ угла наклона этой прямой к оси OX.
6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$ под углом 135° к оси OX в виде $y = kx + b$. Введите значения k и b: $k =$ ___ , $b =$ ___
7. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 1)$ и $M_2(5; 4)$ в виде общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$. Введите значения A, B, C:
$A =$ ___ , $B =$ ___ , $C =$ ___
8. Укажите уравнения прямых, параллельных прямой y = 3x +7.

$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$
$y = 3x - 27$
$\frac{y}{9} - \frac{x}{3} = 1$
$3x + 2y - 6 = 0$
$6x - 2y + 13 = 0$

9. Выберите уравнение, описывающее прямую, изображенную на рисунке



$3x + 2y + 6 = 0$
$3y - 2x = 1$
$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

10. Среди прямых укажите перпендикулярные.

$3x - 2y + 7 = 0$
$12x + 8y - 9 = 0$
$6x + 4y - 5 = 0$
$2x + 3y - 6 = 0$

11. Две прямые заданы уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$. Найти острый угол между этими прямыми (в градусах). Ответ введите целым числом без указания размерности.

Введите ответ:

12. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y – 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$. Ответ введите целым числом.

Введите ответ:

13. Определить, какие три из точек A (1; 4); B (–2; 1); C (–1; 7); D (3; 1) лежат на одной прямой.

- [ ] A
- [ ] B
- [ ] C
- [ ] D

14. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y – 5 = 0$, $x – 3y + 10 = 0$, $x – 2 = 0$. Определить длину стороны AB.

Ответ введите целым числом:

15. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку M (–2; –5) и параллельной прямой $3x+4y+2=0$, в виде $Ax + By + C = 0$. Введите значения A, B, C:

$A =$, $B =$, $C =$

16. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку M (–2; –5) и перпендикулярной прямой 3x+4y+2=0, в виде Ax+By+C=0. Введите значения A, B, C:

$A =$, $B =$, $C =$

17. Выберите уравнения прямых, проходящих через т. A (4; 3) и отсекающих от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.

☐	$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
☐	$-\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 1$
☐	$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
☐	$-\frac{2x}{3} - \frac{y}{4} = 1$

18. Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x + y = 5$ равнобедренный треугольник. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ введите целым числом:

Кривые второго порядка

Тестовые задания для самоконтроля

1. Укажите верное соответствие между кривыми второго порядка и их каноническими уравнениями.

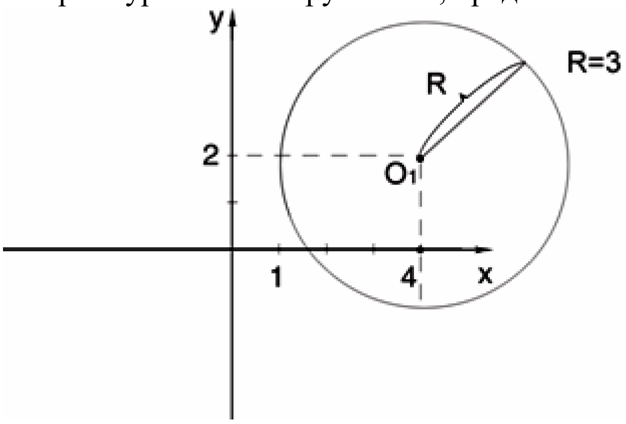
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	▾

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a\neq b)$	
$x^2+y^2=R^2$	
$y^2=2px$	

2. Уравнение второй степени $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где $A^2+C^2\neq 0$ соответствует:

окружности, если	
эллипсу, если	
гиперболе, если	
параболе, если	

3. Выбрать уравнение окружности, представленной на рисунке:



☐	$x^2+y^2=9$
☐	$(x-4)^2+(y-2)^2=9$
☐	$(x+4)^2+(y+2)^2=9$
☐	$(x-4)^2-(y-2)^2=9$

4. Найти квадрат радиуса окружности $x^2+y^2+16y-9=0$

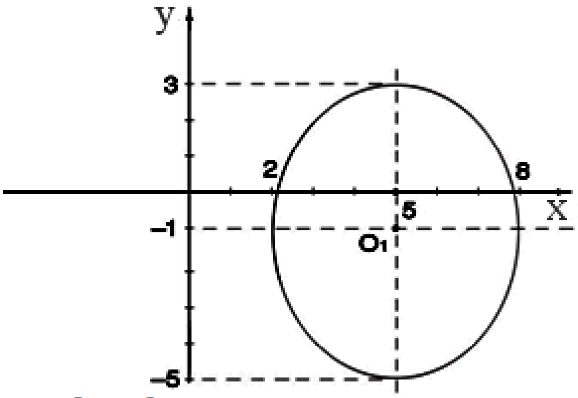
Введите ответ целым числом:

5. Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0$, среди предложенных:

☐	$(x-9)^2+(y-2)^2=1$

☐	$(x-1)^2+(y+6)^2=1$
☐	$(x-5)^2+(y+2)^2=1$

6. Выбрать уравнение эллипса, представленного на рисунке:



☐	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$
☐	$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$
☐	$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
☐	$\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

7. Определить тип кривой $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$

Введите ответ:

8. Найти квадрат большой полуоси эллипса, фокусы которого лежат на оси OX, малая полуось $2\sqrt{6}$., расстояние между фокусами 8.

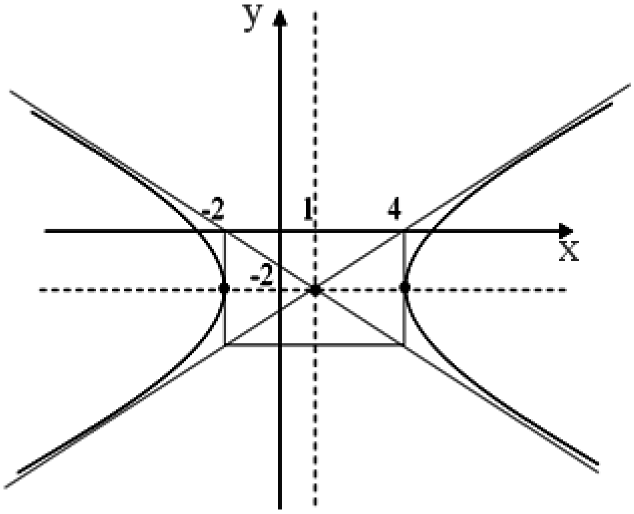
Введите ответ целым числом:

9. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2;\ \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ и выбрать его среди предложенных:

☐	$\frac{x^2}{10}+y^2=1$
☐	$x^2+\frac{y^2}{10}=1$
☐	$x^2+10y^2=10$

☐	$10x^2 + y^2 = 10$

10. Выбрать уравнение гиперболы, представленной на рисунке:



☐	$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$
☐	$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$
☐	$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
☐	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

11. Найти минимальную полуось гиперболы $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$:

Введите ответ целым числом:

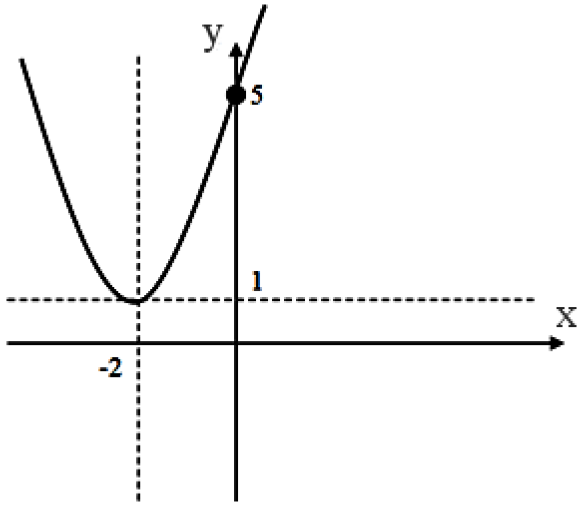
12. Для гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$ найти расстояние между фокусами.

Введите ответ целым числом:

13. Через точку M (0; –1) и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

Введите координаты точки: x = ☐, y = ☐

14. Выбрать уравнения параболы, представленной на рисунке.



- $y = 2\,(x + 2)^2$
- $y - 1 = (x + 2)^2$
- $y + 1 = (x - 2)^2$
- $y + (x - 2)^2 = 1$

15. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью OX. Выбрать его из предложенных:

- $x^2 = 4y$
- $x^2 = 16y$
- $y^2 = 16x$
- $y^2 = 4x$

16. Выберите среди предложенных уравнений уравнения параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно OX и отсекающей от прямой $y = x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

- $y^2 = 4x$
- $y^2 = 32x$
- $y^2 = -4x$
- $y^2 = -16x$

Операции над векторами. Скалярное произведение двух векторов.

Тестовые задания для самоконтроля

1. Даны векторы $\vec{a} = (-2; 3; 1)$ и $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Укажите верное соответствие между операциями над векторами и их результатами.

$\vec{a} + \vec{b}$	

$\vec{a}-\vec{b}$	▼
$2\vec{a}$	▼
$2\vec{a}-3\vec{b}$	▼

☐☐☐ Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если A(2; –4; 0) и B (9; 1; $\sqrt{7}$):

$|\overrightarrow{AB}| =$ ☐

4. Условие коллинеарности векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ имеет вид:

☐	$a_x \cdot b_x = a_y \cdot b_y = a_z \cdot b_z = k$
☐	$a_x + b_x = a_y + b_y = a_z + b_z = k$
☐	$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k$

5. Выберите векторы, коллинеарные вектору $\vec{a} = (2; -3; -1)$

☐	$\vec{b} = (5; 0; 2)$
☐	$\vec{b} = (8; 12; -4)$
☐	$\vec{b} = (-4; 6; 2)$
☐	$\vec{b} = (6; -9; -3)$

6. Вектор образует с осями Ox, Oy и Oz углы α, β, γ соответственно. Определите какие углы α, β, γ могут составить вектор.

☐	$\alpha = 45^o; \beta = 60^o; \gamma = 120^o$
☐	$\alpha = 45^o; \beta = 60^o; \gamma = 90^o$
☐	$\alpha = 30^o; \beta = 45^o; \gamma = 135^o$
☐	$\alpha = 30^o; \beta = 60^o; \gamma = 90^o$

7. Выберите векторы, которые параллельны координатной плоскости OXY.

☐	$\vec{a} = (2; 7; 0)$
☐	$\vec{a} = (0; 2; 4)$
☐	$\vec{a} = (0; -1; 0)$
☐	$\vec{a} = (-2; 0; 3)$

8. Даны точки A (3; –1; 2), B (1; 2; –1), C (–3; 1; 1), D (0; –6; 0). Определите тип четырехугольника ABCD.

Введите ответ: ____

9. Вектор $\vec{c}$ = (3; 4) разложен по векторам $\vec{a}$ = (3; –1) и $\vec{b}$ = (1; –2). Выберите верное разложение:

☐	$\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$
☐	$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
☐	$\vec{c} = 9\vec{a} - 6\vec{b}$
☐	$\vec{c} = -2\vec{a} - \vec{b}$

10. Найдите разложение вектора $\vec{c}$ = (–4; 2; 2) по векторам $\vec{a}$ = (0; –2; –1) и $\vec{b}$ = (2; 1; 0) в виде $\vec{c} = n\vec{a} + m\vec{b}$. Введите значения коэффициентов n и m:

n = ☐, m = ☐

11. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ называется число, обозначенное $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и вычисляемое по формуле:

☐	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{b}\rvert \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$
☐	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$
☐	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$
☐	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$
☐	$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

12. Если φ - угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то укажите соответствие между величиной $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и величиной φ.

$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$	▼
$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$	▼
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$	▼

13. Найдите скалярное произведение $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

Введите ответ целым числом:

14. Даны векторы $\vec{a}$ = (1; 3; –2) и $\vec{b}$ = (–1; *m*; 4). При каком значении числа *m* $\vec{a} \perp \vec{b}$:

m =

15. Упростите выражение $2\vec{i} \cdot (3\vec{j} - 4\vec{k} - 5\vec{i})$

- ☐ $6\vec{j} - 8\vec{k} - 10\vec{i}$
- ☐ –12
- ☐ –10
- ☐ 10

16. Найдите квадрат модуля вектора $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$, где $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – единичные векторы, составляющие угол 60°.

Ответ введите целым числом:

17. Найдите угол *A* треугольника с вершинами *A* (–1; 3; 2), *B* (3; 5; –2) и *C* (3; 3; –1). Ответ введите в виде 15cos*A*.

Введите ответ:

18. Даны вектора $\vec{a}$ = (4; –2; –6) и $\vec{b}$ = (–3; 4; –12). Найдите $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$

Введите ответ:

Итоговый тест

1. Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$, где $\bar{a} = (0;-3;2)$, $\bar{b} = (1;-2;0)$:

a) $\sqrt{7}$

b) 25

c) 5

d) 13

e) 4

2. Записать уравнение прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку с координатами (2;0):

a) x = 2

b) y = 2

c) x + y = 2

d) x = 0

e) x - y = 2

3. Уравнение второго порядка $x^2 + 4y^2 = 4$ определяет на плоскости:

a) окружность

b) гиперболу

c) параболу

d) прямую

e) эллипс

4. Определитель третьего порядка можно вычислить:

a) по правилу “треугольника”

b) по методу Сарруса

c) как произведение элементов главной диагонали

d) как сумму произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

e) методами, указанными в вариантах a), b), d)

5. Что является результатом вычисления определителя квадратной матрицы:

a) матрица

b) вектор

c) линейное уравнение

d) скаляр

e) сумма элементов главной диагонали

6. Определите размерность матрицы С, равной произведению матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times p}$

a) не определено

b) (m x n)

d) (n x m)

e) (m x p)

c) (n x p)

7. Произведение невырожденной матрицы А на обратную к ней матрицу А-1 равно:

a) единичной матрице

b) квадратной матрице

c) транспонированной матрице

d) нулевой матрице

e) матрице, все элементы которой равны 1

8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{5} \end{vmatrix}$:

a) 2

b) -22

c) -2

d) -1

e) 1

9. Метод Гаусса используется для…

a) решения квадратных уравнений.

b) вычисления определителей.

c) решения определённой системы линейных уравнений.

d) решения неопределённой системы линейных уравнений.

e) решения любой системы линейных уравнений.

10. Применяя метод Крамера или матричный метод, …

a) находим решение любой системы линейных уравнений.

b) находим решение определённой системы линейных уравнений.

c) находим решение неопределённой системы линейных уравнений.

d) находим решение совместной системы линейных уравнений.

e) находим решение несовместной системы линейных уравнений.

11. Решить графо - аналитическим методом задачу линейного программирования:

$\boldsymbol{F = x_1 + 3x_2 \to max}$ при ограничениях - $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 \le 1} \\ \boldsymbol{x_1, x_2 \ge 0} \end{cases}$

a) max F = 1

b) max F = 2

c) max F = 5

d) max F = 3

e) функция цели не ограничена

12. Симплексный метод используется для решения…

a) системы n линейных уравнений с n переменными.

b) задачи об экстремуме функций нескольких переменных

c) только производственной задачи.

d) только транспортной задачи.

e) любой задачи линейного программирования.

13. Для построения опорного плана транспортной задачи применяют:

a) метод “северо - восточного угла”

b) метод подбора

c) метод “северо - западного угла угла”

d) метод минимального тарифа

e) любой из c) и d)

14. Как производится проверка на оптимальность опорного плана перевозок в транспортной задаче

a) матричным способом

b) методом потенциалов

c) методом минимального тарифа

d) методом “северо - западного угла”

e) любым из перечисленных

15. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ равен

1) 0 2) 9 3) –3 4) 3

16. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, то матрица $C = A + 2B$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

17. Матрица называется невырожденной, если:

1) определитель матрицы равен нулю 2) она содержит нулевой столбец 3) она содержит нулевую строку 4) определитель матрицы не равен нулю

18. Размерность матрицы C, полученной в результате умножения матрицы $A_{m\times p}$ на матрицу $B_{p\times n}$, равна

1) $m\times n$ 2) $n\times m$ 3) $n\times p$ 4) $p\times m$

19. Если (x_0,y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$, тогда x_0+y_0 равно

1) –0,5 2) 3,5 3) 0,5 4) –3,5

20. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ равен…

1) –1 2) 1 3) –5 4) 5

21. Если $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица $C=2A+B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$

22. Если (x_0,y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$, тогда $x_0 - y_0$ равно…

1) –0,5 2) 7,5 3) 0,5 4) –7,5

23. Прямая проходит через точки O(0;0) и B(5;–15). Тогда ее угловой коэффициент равен…

1) –3 2) –5 3) 3 4) 5

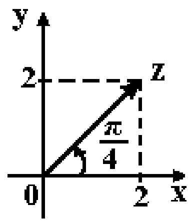
24. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, то длина ее действительной полуоси равна…

1) 3 2) 2 3) 4 4) 9

25. Нормальный вектор плоскости $x+2y+z-15=0$ имеет координаты…

1) (1;2;1) 2) (2;1;–15) 3) (1;2;–15) 4) (1;1;–15)

26. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z=x+iy$.



Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид…

1) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 4) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

27. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ равен...

1) –2 2) 1 3) 5 4) 0 5) -9

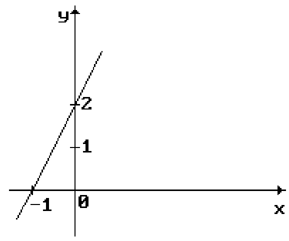
28. Если $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, то B-$2A$=...

1) 1; 2) –19; 3) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. Если $\vec{a} = 2\cdot\vec{i} - 6\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k}$, то $|\vec{a}|$=...

1) $\sqrt{23}$ 2)7 3) –1 4) $\sqrt{11}$ 5) 11

30. Уравнение линии на рисунке имеет вид…



1) $x+y=-2$ 2) $2x-y+2=0$ 3) $y=-2x-2$

4) $y^2=-x+2$ 5) $x=-2y$

31. Уравнение $2x^2+2y^2+x=0$ определяет на плоскости…

1) окружность 2) прямую 3) гиперболу

4) параболу 5) эллипс

32. Из уравнений: а) $2x-3y+z+1=0$; б) $x+2y-6=0$; в) $x+3y=0$ выберите те, которые определяют плоскость, параллельную оси OZ.

Варианты ответов:

1) только в) 2) только б) 3) ни одно

4) только а) 5) только б) и в)

33. Груз, находящийся в пунктах A и B необходимо перебазировать в пункты C и D. В пунктах A и B имеется соответственно груза на 6 и 4 машин. В пункты C и D надо отправить соответственно 3 и 7 машин груза. Расстояния между пунктами в километрах указаны в таблице

	C	*D*
A	80	30
B	60	90

Укажите такой план перевозок, при котором затраты на транспортировку груза были наименьшими.

1) $x_{AC}=0$ $x_{AD}=6$ $x_{BC}=3$ $x_{BD}=1$

2) $x_{AC}=2$ $x_{AD}=4$ $x_{BC}=1$ $x_{BD}=3$

3) x_{AC}=2 x_{AD}=3 x_{BC}=2 x_{BD}=4

4) x_{AC}=3 x_{AD}=3 x_{BC}=4 x_{BD}=0

5) x_{AC}=5 x_{AD}=1 x_{BC}=1 x_{BD}=3

34. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен

1) 1 2) 2 3) 4 4) 0 5) 3

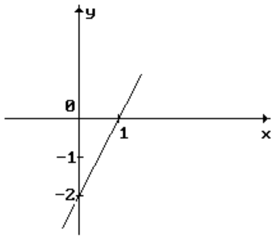
35. Если $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, то $2A$-B=...

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 3) 0 4) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ 5) 24

36. Если $\bar{a} = 12\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$, то $|\bar{a}| = \cdots$

1) –14 2) 14 3) 22 4) 10 5) $\sqrt{124}$

37. Уравнение линии на рисунке имеет вид…



1) $2x$-y+2=0 2) y=$2x$+2 3) y=-$2x$

4) y=x+1 5) $2x$-y-2=0

38. Координаты фокусов эллипса $25x^2+9y^2=900$ равны…

1) F_1(4;0) F_2(-4;0) 2) F_1(0;-8) F_2(0;8)

3) F_1(0;4) F_2(0;-4) 4) F_1(0;-2) F_2(2;0)

5) F_1(-8;0) F_2(8;0)

39. Из плоскостей:

а) $3x$-$2y$+4=0

б) y+z+1=0

в) x-$3y$+z=0

выберите те, которые параллельны оси OX.

Варианты ответа:

1) только а 2) ни одна 3) только б
4) только а и в 5) только в

40. Фирма производит две модели *A* и *B* сборных книжных полок. Для каждого изделия модели *A* требуется 3 м^2 досок, а для изделия модели *B* - 4м^2. Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м^2 досок в неделю. Для каждого изделия модели *A* требуется 12 мин. машинного времени, а для изделия *B* - 30 мин. В неделю можно использовать 160 час. машинного времени. Сколько изделий каждой модели следует фирме выпускать в неделю для получения максимальной прибыли, если каждое изделие модели *A* приносит 2 ден. ед. прибыли, а каждое изделие *B* - 4 денежных единиц прибыли?

1) x_A=200 x_B=500 2) x_A=200 x_B=300
3) x_A=400 x_B=160 4) x_A=300 x_B=200
5) x_A=400 x_B=300

41. Угловой коэффициент "*k*" и величина отрезка "*b*", отсекаемого прямой $x+2\cdot y+6=0$ на оси *OY* равны:

1) *b*=6, *k*=2 2) *b*=3, *k*=0,5 3) *b*=6, *k*=0.5
4) *b*=-3, *k*=-0,5 5) *b*=3, *k*=2

42. Уравнение $x^2+y^2-2\cdot x-3=0$ определяет на плоскости:

1) параболу 2) прямую 3) эллипс
4) окружность 5) гиперболу

43. Какое из данных уравнений определяет плоскость:

а) $x+2\cdot y-4=0$

б) $y^2=4\cdot x-30$

в) $2\cdot x+3\cdot y+z=0$

Варианты ответов:

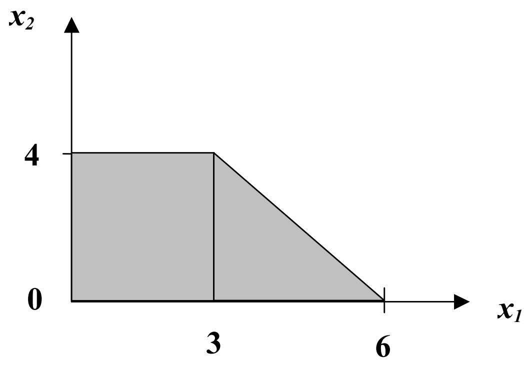
1) только а) 2) только а) и в) 3) все
4) только в) 5) ни одно

44. Дан параллелограмм ОАВС. Векторы $\overline{OA}=(-2;3;-4)$, $\overline{OB}=(-1;2;0)$. Тогда вектор $\overline{OC}$ имеет координаты…

Варианты ответов:

1) (1; -1; 4) 2) (-3; 5; -4) 3) (-1; 1; -4) 4) (2; 6; 0)

45. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:



Тогда максимальное значение функции $Z = x_1 + 7x_2$ равно...

Варианты ответов:

1) 33 2) 25 3) 28 4) 31

46. Комплексное число задано в виде $z = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Найти его аргумент.

Варианты ответов:

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $-\frac{2\pi}{3}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{3}$

47. Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой 2x + y = 5 равнобедренный треугольник. Найдите площадь этого треугольника.

48. Векторы $\overline{a} = \overline{(2;0;3)}$, $\overline{b} = \overline{(-1;3;0)}$ и $\overline{c} = \overline{(0;4;\lambda)}$ лежат в одной плоскости, если параметр λ равен…

49. Угол между прямой $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x - 2y + z - 7 = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{2}$

50. Асимптоты гиперболы $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ задаются уравнениями…

Варианты ответов:

1) $y = \pm\frac{3}{2}x$ 2) $y = \pm\frac{9}{4}x$ 3) $y = \pm\frac{4}{9}x$ 4) $y = \pm\frac{2}{3}x$

Тесты оцениваются по 100 балльной шкале. Все задания равноценны.

4.4. Методические материалы

Процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций, осуществляются в соответствии с Положением о структуре и содержании балльно-рейтинговой системы оценки знаний обучающихся в Волгоградском институте управления – филиале ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации» (Утверждено Ученым советом ВИУ РАНХиГС от 20.01.2017 г., Протокол №2).

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

5.1. Рекомендации по планированию времени, необходимого на изучение дисциплины

Планирование времени, отводимого на изучение дисциплины «Линейная алгебра», является важным этапом организации учебной и самостоятельной работы каждого студента, поскольку от равномерности распределения учебной нагрузки будут, в конечном итоге, зависеть результаты его итоговой аттестации. Активизация учебной деятельности лишь в период сессии, при отсутствии текущей деятельности в течение учебного семестра, увеличивает нагрузку на студента в несколько раз. Объём изучаемого материала, рассчитанный на весь семестр, труднее освоить за короткий промежуток времени, что, безусловно, снижает качество полученных знаний.

Основные рекомендации по организации учебной деятельности студента в течение семестра и в период сессии можно обозначить следующим образом:

1. Каждому студенту необходимо стремиться к равномерному распределению времени при изучении тем дисциплины.
2. В процессе обучения студент не должен ограничиваться лишь посещением лекционных и семинарских занятий. На лекциях следует активно воспринимать предлагаемую лектором информацию, участвуя в дискуссиях, задавая вопросы лектору, особенно в случае, если новый материал достаточно сложен для понимания. Посещение семинаров является отличной возможностью для студента продемонстрировать свои знания и повысить, тем самым, свой рейтинг по данной дисциплине. Поэтому важно помнить, что занятия по дисциплине нужно не только посещать, но и использовать весь потенциал имеющихся возможностей с целью получения знаний, обладания навыками исследователя, упрощения итоговой аттестации по дисциплине.
3. Для полноценного изучения дисциплины следует выделить не менее двух дней в неделю, помимо аудиторных занятий, для самостоятельной работы по освоению тематики данного курса.

Структура времени, необходимого на изучение дисциплины

Форма изучения дисциплины	Время, затрачиваемое на изучение дисциплины, %
Изучение литературы, рекомендованной в учебной программе	20
Решение задач, практических упражнений и ситуационных примеров	60
Изучение тем, выносимых на самостоятельное рассмотрение	20
Итого	100

5.2. Рекомендации по подготовке к практическому (семинарскому) занятию

Практическое (семинарское) занятие – одна из основных форм организации учебного процесса, представляющая собой коллективное обсуждение студентами теоретических и практических вопросов, решение практических задач под руководством преподавателя. Основной целью практического (семинарского) занятия является проверка глубины понимания студентом изучаемой темы, учебного материала и умения изложить его содержание ясным и четким языком, развитие самостоятельного мышления и творческой активности у студента. На практических (семинарских) занятиях предполагается рассматривать наиболее важные, существенные, сложные вопросы которые, наиболее трудно усваиваются студентами. При этом готовиться к практическому (семинарскому) занятию всегда нужно заранее. Подготовка к практическому (семинарскому) занятию включает в себя следующее:

- обязательное ознакомление с планом занятия, в котором содержатся основные вопросы, выносимые на обсуждение;
- изучение конспектов лекций, соответствующих разделов учебника, учебного пособия;
- работа с основными терминами (рекомендуется их выучить);
- изучение дополнительной литературы по теме занятия, делая при этом необходимые выписки, которые понадобятся при обсуждении на семинаре;
- формулирование своего мнения по каждому вопросу и аргументированное его обоснование;
- запись возникших во время самостоятельной работы с учебниками и научной литературы вопросов, чтобы затем на семинаре получить на них ответы;
- обращение за консультацией к преподавателю.

В процессе семинарских занятий по дисциплине студент должен активно воспринимать, осмысливать и углублять полученную информацию, решать практические задачи, овладевать профессионально необходимыми умениями. Практическое и лабораторное занятие – особая, специфичная для вуза форма учебной работы. Целью семинарского занятия является углубление и конкретизация знаний и развитие навыков самостоятельного анализа вопросов по наиболее важным и сложным темам учебных курсов. На занятии преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой студента в течение семестра. Его результаты фиксируются в учебных журналах, а затем в конце семестра являются основанием для получения зачета.

5.3. Рекомендации по изучению методических материалов

Методические материалы по дисциплине позволяют студенту оптимальным образом организовать процесс изучения данной дисциплины. Методические материалы по дисциплине призваны помочь студенту понять специфику изучаемого материала, а в конечном итоге –

максимально полно и качественно его освоить. В первую очередь студент должен осознать предназначение методических материалов: структуру, цели и задачи. В разделе, посвященном методическим рекомендациям по изучению дисциплины, приводятся советы по планированию и организации необходимого для изучения дисциплины времени, описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»), рекомендации по работе с литературой, советы по подготовке к экзамену и разъяснения по поводу работы с тестовой системой курса и над домашними заданиями. В целом данные методические рекомендации способны облегчить изучение студентами дисциплины и помочь успешно сдать экзамен.

Изучение методических материалов ставит своей целью оказание помощи студентам экономических специальностей академии в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков по дисциплине «Линейная алгебра» в объеме действующей программы. Эта работа требует не только большого упорства, но и умения, без которого затрата сил и времени не дает должного эффекта. Читать, понимать прочитанное и применять его практически – вот в чем суть умения работать с методическими пособиями.

Особое внимание необходимо уделить практикуму. Решение задач является лучшим способом творческого проникновения в математическую истину. Чтобы научиться решать задачи того или иного типа, рекомендуется сначала изучить план решения в общем виде (алгоритм), затем рассмотреть пример реализации плана в конкретном случае, решив при этом не менее 3 – 5 задач из числа предлагаемых для самостоятельного решения. Важной позицией является также то, что основным навыком профессионала является умение самостоятельно работать с литературой в процессе решения конкретной проблемы.

Конечно, общих рецептов для решения разнообразных задач не существует, однако рекомендуем придерживаться следующих советов:

- Внимательно изучите цель, поставленную в задаче; выявите, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом или некоторыми ее элементами.
- Не следует приступать к решению, не обдумав условия и не найдя плана решения.
- Попробуйте выделить в данной задаче серию вспомогательных задач, последовательное решение которых может привести к успеху.
- Определив алгоритм решения, реализуйте его, произведите проверку полученного результата и его анализ.
- Очень успешным бывает применение функционально-графического метода.
- Если решить задачу не удается, обязательно обратитесь к преподавателю за консультацией.

5.4. Рекомендации по работе с литературой

Очень важную роль играет выбор учебной литературы и методических пособий. Желательно придерживаться этих учебников при изучении всего курса, так как замена может привести к утрате логической связи между отдельными темами.

В последние годы среди студентов экономических специальностей особой популярностью пользуется следующая литература:

1. Высшая математика для экономистов. / Под.ред. Н.Ш. Кремера.-М.: Юрайт, 20011.
2. Практикум по высшей математике для экономистов. / Под.ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2011.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после понимания предыдущего, выполняя все необходимые вычисления. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Необходимо подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для получения консультации преподавателя.

5.5. Советы по подготовке к экзамену (зачету), контрольной работе

Фундамент математических знаний закладывается на лекционных и семинарских занятиях, а также при подготовке к ним. Буквально с первого сентября необходимо выработать серьезное отношение к конспекту по линейной алгебре. Он должен в полном объеме содержать определения, теоремы и выводы основных формул курса. Записи должны быть аккуратными. Не нужно забывать, что они делаются для того, чтобы впоследствии с ними работать. Все теоремы и факты нужно понять, а поняв, уметь их самостоятельно доказывать. Прочитав доказательство какой-то теоремы, воспроизвести это доказательство на бумаге без конспекта или учебника.

Помните, что умение решать задачи является следствием глубоко понятого соответствующего теоретического материала. Учебник нужно не просто читать, а изучать; основой запоминания является понимание, знание забывается – понимание никогда; повторение – важнейшее средство, предотвращающее забывание; необходимо выработать привычку систематической самостоятельной работы, «натаскивание» к экзамену или зачету дает слабый и поверхностный результат.

Для успешной сдачи зачета и экзамена студент должен знать наизусть достаточно солидный объем теорем, формул, алгоритмов, моделей. Не откладывая процесс заучивания на последние три дня перед экзаменом, подготовка должна вестись с первых лекций. Будет очень хорошо, если вы заведете себе личный справочник и будете его регулярно изучать, пополняя новым материалом.

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Линейная алгебра».

6.1. Основная литература.

1. Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: Изд-во Юрайт, 2011.
2. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учеб.-справ. пособие / под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во Юрайт, 2011. - 646 с.
3. Руководство к решению задач по высшей математике: учеб. пособие / Касьянов В.И. - М.: Изд-во Юрайт, 2011.
4. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие / Михалев А.А. - М.: Академия, 2013.
5. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие-Электрон. текстовые данные / Саратов: Научная книга, 2012, режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6293.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
6. Руководство к решению задач по высшей математике: учеб. пособие / М.: Изд-во Юрайт; ИД Юрайт, 2011.

6.2. Дополнительная литература.

1. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. – М.: ЭКСМО, 2006. – 224 с. – (Высшее экономическое образование).
2. Линейная алгебра. Часть 2 [Электронный ресурс]: учебное пособие— Электрон. текстовые данные, ЭБС АСВ / СПб: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2014, режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30007.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Оникс, 2007.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика. -М.: ЮНИТИ, 1998.
5. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч1-3. - М.: Финансы и статистика, 1998.

Справочники

1. Справочник по математике для экономистов / Под.ред. В.И. Ермакова. -М.: Высшая школа, 1987.

2. Лопатников А.И. Краткий экономико-математический словарь. -М.: Наука, 1987.
3. Воднев В.Г., Наумович А.Ф. Математический словарь высшей школы. -М.:Издание МПИ, 1988.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. -М.: Наука, 1987.

6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы включают в себя комплекс аналитических заданий, выполнение которых предполагает тщательное изучение учебно – методической литературы, предлагаемой в п.6 «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины». Задания предоставляются на проверку на бумажном носителе. Предложенные задания оформляются в печатном виде (возможен рукописный вариант), форме аналитических таблиц и графических схем.

Практические задания с ответами и примеры решения задач к семинарам по всем темам курса приведены в пособии: Высшая математика для экономистов: практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 477 с.

С тестовыми материалами по дисциплине для данной специальности можно ознакомиться по адресу http://i-exam.ru (сайт НИИ мониторинга качества образования).

6.4. Нормативные правовые документы.

Не предусмотрены.

6.5. Интернет-ресурсы, справочные системы.

1. Образовательный математический сайт - http://old.exponenta.ru/educat/links/l_school.asp.
2. Сайт НИИ мониторинга качества образования i-exam.ru.
3. Электронный учебный центр «Резольвента» http://www.resolventa.ru/.
4. Образовательный математический сайт www.matburo.ru.
5. **Математический сайт** http://www.math.ru/ - на сайте представлены книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, истории из жизни математиков, официальные документы Министерства образования и науки, необходимые в работе.
6. **Софт@Mail** http://soft.mail.ru/subcat_list.php?ps=0&cat=179&lic=3&osid=0 – на сайте представлена рубрика «Электронные издания», где Вы сможете ознакомиться с электронными учебниками, энциклопедиями, справочниками. Часть электронных ресурсов можно скачать на сайте как платно, так и бесплатно.
7. **Естественно-научный портал** http://en.edu.ru/ - это математический портал, на котором вы найдете любой материал по математическим дисциплинам.
8. **Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова** http://lib.mexmat.ru/helpdesk.php - в электронной библиотеке мехмата МГУ содержится несколько тысяч книг по математике, физике, компьютерным и другим наукам. Библиотека регулярно пополняется.

9. **Образцы решения задач по высшей математике** http://reshebnik.ru/solutions/.
10. **Высшая математика** http://mathelp.spb.ru - сайт содержит лекции, учебники on-line, web-сервисы по высшей математике в помощь студентам.

7. Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает в себя:

- ✓ лекционные аудитории, оборудованные видеопроекционным оборудованием для презентаций, средствами звуковоспроизведения, экраном и доской;
- ✓ компьютерные классы, для проведения занятий практического типа и самостоятельной работы оснащенные современными компьютерами с выходом в Интернет (компьютеры, принтеры, проекторы, экраны, аудиторные доски, компьютерные кресла, компьютерные столы, стулья, письменные столы, сеть Интернет, доступ к электронно-библиотечным системам и к электронной информационно-образовательной среде института);
- ✓ учебные аудитории для групповых и индивидуальных консультаций (письменные столы, стулья, аудиторная доска;

Дисциплина должна быть поддержана соответствующими лицензионными программными продуктами. Программные средства обеспечения учебного процесса должны включать:

- ✓ Операционные системы семейства Windows (98, XP, Vista, 7, 8);
- ✓ Microsoft Office;
- ✓ программы презентационной графики;
- ✓ видеопроигрыватели;
- ✓ графические редакторы.

Вуз обеспечивает каждого обучающегося рабочим местом в компьютерном классе в соответствии с объемом изучаемых дисциплин, обеспечивает выход в сеть Интернет.

Материально-техническое обеспечение дисциплины для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов включает в себя следующее:

- ✓ учебные аудитории оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения для обучающихся с различными видами ограничений здоровья;
- ✓ учебная аудитория, в которой обучаются студенты с нарушением слуха оборудована компьютерной техникой, аудиотехникой (акустический усилитель и колонки), видеотехникой (мультимедийный проектор), мультимедийной системой. Для обучения лиц с нарушениями слуха используются мультимедийные средства и другие технические средств для приема-передачи учебной информации в доступных формах;

- ✓ для слабовидящих обучающихся в лекционных и учебных аудиториях предусмотрен просмотр удаленных объектов (например, текста на доске или слайда на экране) при помощи видеоувеличителей для удаленного просмотра;
- ✓ для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата в лекционных и учебных аудиториях предусмотрены специально оборудованные рабочие места;
- ✓ для контактной и самостоятельной работы используется мультимедийные комплексы, электронные учебники и учебные пособия, адаптированные к ограничениям здоровья обучающихся.

Обучающиеся с ограниченными возможностями здоровья и инвалиды, в отличие от остальных, имеют свои специфические особенности восприятия, переработки материала, выполнения промежуточных и итоговых форм контроля знаний. Они обеспечены печатными и электронными образовательными ресурсами (программы, учебники, учебные пособия, материалы для самостоятельной работы и т. д.) в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха, с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.