

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Волгоградский институт управления – филиал РАНХиГС

Экономический факультет

кафедра информационных систем и математического моделирования

УТВЕРЖДЕНА
учёным советом
Волгоградского института управления –
филиала РАНХиГС
Протокол № 2 от 21.09.2023 г.

ПРОГРАММА СПЕЦИАЛИТЕТА

Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

(наименование образовательной программы)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ,
реализуемой без применения электронного (онлайн) курса**

Б1.О.33.01 МАТЕМАТИКА

(индекс, наименование дисциплины (модуля), в соответствии с учебным планом)

краткое наименование дисциплины (модуля) (при наличии)

38.05.01 Экономическая безопасность

(код, наименование направления подготовки (специальности))

очная, заочная

(форма(ы) обучения)

Год набора – 2024

Волгоград, 2021 г.

Автор(ы)–составитель(и):

к.п.н., доцент, доцент кафедры информационных систем и математического моделирования Ключева И.А.

Заведующий кафедрой информационных систем и математического моделирования,
к.т.н., доцент Астафурова О.А.

РПД Б1.О.33.01 «Математика» одобрена на заседании кафедры информационных систем и математического моделирования

Протокол от 31 августа 2023 года № 1

Рабочая программа дисциплины составлена на основе типовых рабочих программ дисциплин Б.1.Б.11.01 Линейная алгебра Б.1.Б.11.02 Математический анализ для специальности 38.05.01 Экономическая безопасность, авторами–составителями которой являются:

Доцент кафедры социально-гуманитарных, экономических и естественно-научных дисциплин к.т.н., доцент Резниченко А. В.

Доцент кафедры социально-гуманитарных, экономических и естественно-научных дисциплин к.э.н. доцент Жук И. А.

Заведующий кафедрой социально-гуманитарных, экономических и естественно-научных дисциплин к.т.н., доцент Выжигин А.Ю.

Заведующий кафедрой экономической безопасности, д.э.н., профессор Ломакин А.Л.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы..... | 4 |
| 2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО..... | 6 |
| 3. Содержание и структура дисциплины..... | 7 |
| 3.1. Структура дисциплины..... | 7 |
| 3.2. Содержание дисциплины (модуля)..... | 8 |
| 4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся..... | 11 |
| 4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации..... | 11 |
| 4.2. Типовые материалы текущего контроля успеваемости обучающихся..... | 11 |
| 5. Оценочные материалы промежуточной аттестации по дисциплине..... | 44 |
| 5.1. Методы проведения зачета и экзамена..... | 44 |
| 5.2. Оценочные материалы промежуточной аттестации..... | 44 |
| 6. Методические материалы по освоению дисциплины..... | 48 |
| 7. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)..... | 54 |
| 7.1. Основная литература..... | 54 |
| 7.2. Дополнительная литература..... | 54 |
| 7.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы..... | 55 |
| 7.4. Нормативные правовые документы..... | 55 |
| 7.5. Интернет-ресурсы..... | 55 |
| 7.6. Иные источники..... | 55 |
| 8. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы..... | 56 |
| Приложение 1..... | 57 |

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

1.1. Осваиваемые компетенции

Дисциплина Б1.О.33.01 «Математика» обеспечивает овладение следующими компетенциями:

| Код компетенции | Наименование компетенции | Код компонента компетенции | Наименование компонента компетенции |
|-----------------------|--|----------------------------|--|
| ПК _{о2} ОС-1 | Способность использовать методы математического анализа для решения прикладных задач | ПК _{о2} ОС-1.1. | Способен выбирать методы математического анализа для решения прикладных задач |
| | | ПК _{о2} ОС-1.2. | Способен осуществлять математический анализ с применением выбранных методов для решения прикладных задач |

1.2. Результаты обучения

В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

| ОТФ/ТФ (при наличии профстандарта) трудовые или профессиональные действия | Код этапа освоения компетенции | Результаты обучения |
|--|--------------------------------|---|
| Профессиональный стандарт «Специалист по финансовому консультированию» (утв. приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 19 марта 2015 г. N 167н) ОТФ «Консультирование клиентов по составлению финансового плана и формированию целевого инвестиционного портфеля» | ПК _{о2} ОС-1.1. | На уровне знаний: знает основные теоретические положения для решения типовых математических задач, используемых при решении экономических задач |
| | | На уровне умений: демонстрирует умение обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные |
| | | На уровне навыков: анализирует и систематизирует методы математического анализа для решения прикладных задач |
| | ПК _{о2} ОС-1.2. | На уровне знаний: применяет математический инструментарий для решения экономических задач На уровне умений: использует современные методы обработки и анализа экономических данных (в т.ч. компьютерные технологии), необходимые для |

| | | |
|--|--|---|
| | | проведения финансово-экономических расчетов |
| | | На уровне навыков: анализирует и систематизирует методы математического анализа для решения прикладных задач |

2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.33.01 «Математика» принадлежит к блоку обязательной части дисциплины. В соответствии с учебным планом, по очной форме обучения дисциплина осваивается в 1 и 2 семестрах. Общая трудоемкость дисциплины в зачетных единицах составляет 9 ЗЕ (324 часа). По заочной форме дисциплина реализуется на 1 курсе.

По очной форме обучения количество академических часов, выделенных на контактную работу с преподавателем (по видам учебных занятий) – 130 часов (лекций – 64 часа, практических занятий – 64 часа, консультации – 2 часа) и на самостоятельную работу обучающихся – 154 часов, на контроль – 40 часов.

По заочной форме обучения количество академических часов, выделенных на контактную работу с преподавателем (по видам учебных занятий) – 24 часа (лекций – 12 часов, практических занятий – 12 часов) и на самостоятельную работу обучающихся – 256 часов, на контроль – 8 часов.

Форма промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом:
по очной форме обучения – зачет в 1 семестре, экзамен во 2 семестре;
по заочной форме обучения – зачет в 1 семестре, экзамен во 2 семестре;

Освоение дисциплины опирается на школьный курс математики. В результате изучения обучающийся должен знать определения, теоремы, подходы к решению задач из основных разделов математики. Знания и навыки, получаемые студентами в результате изучения дисциплины, необходимы для грамотной и профессиональной работы и ведения успешной научно-исследовательской работы в области управления.

3. Содержание и структура дисциплины

3.1. Структура дисциплины

| № п/п | Наименование тем (разделов) | Объем дисциплины (модуля), час. | | | | | СР О | Форма текущего контроля успеваемости**, промежуточной аттестации*** |
|--------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---|------------|-------------|---------|---------|---|
| | | Всего | Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий | | | | | |
| | | | Л/ ДОТ | ЛР/ ДОТ | ПЗ/ ДОТ* | КС Р | | |
| Тема 1 | Элементы теории множеств | 8 | 2 | | 2 | | 4 | О, КР |
| Тема 2 | Матрицы и определители | 22 | 6 | | 6 | | 10 | О, КР |
| Тема 3 | Системы линейных уравнений | 26 | 4 | | 6 | | 16 | О, КР |
| Тема 4 | Векторы на плоскости и в пространстве | 30 | 8 | | 8 | | 14 | О, КР |
| Тема 5 | Элементы аналитической геометрии | 26 | 6 | | 4 | | 16 | О, КР |
| Тема 6 | Комплексные числа | 28 | 6 | | 6 | | 16 | О, КР |
| Промежуточная аттестация | | 4 | | | | | | зачет |
| Итого в 1 семестре | | 144 (4 ЗЕ) | 32 | | 32 | | 80 | |
| Тема 7 | Функции одной переменной | 8 | 2 | | 2 | | 4 | О, КР |
| Тема 8 | Дифференциальное исчисление ФОП | 28 | 8 | | 8 | | 12 | О, КР |
| Тема 9 | Интегральное исчисление ФОП | 30 | 8 | | 8 | | 14 | О, КР |
| Тема 10 | Функции нескольких переменных | 28 | 6 | | 6 | | 16 | О, КР |
| Тема 11 | Дифференциальные уравнения | 24 | 4 | | 4 | | 16 | О, КР |
| Тема 12 | Ряды | 24 | 4 | | 4 | | 16 | О, КР |
| Консультация | | 2 | | | | | | |
| Промежуточная аттестация | | 36 | | | | | | экзамен |
| Итого во 2 семестре | | 180 (5 ЗЕ) | 32 | | 32 | | 80 | |
| Всего: | | 324 (9 ЗЕ) | 64 | | 64 | | 160 | |
| Тема 1 | Элементы теории множеств | 2 | 1 | | | | 1 | О, КР |
| Тема 2 | Матрицы и определители | 3 | 1 | | 1 | | 1 | О, КР |
| Тема 3 | Системы линейных уравнений | 5 | 2 | | 1 | | 2 | О, КР |

| | | | | | | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|---------------|----|--|----|--|-----|---------|
| Итого за 1 сессию | | 10 | 4 | | 2 | | 4 | |
| Тема 4 | Векторы на плоскости и в пространстве | 42 | 1 | | 1 | | 40 | О, КР |
| Тема 5 | Элементы аналитической геометрии | 52 | | | 2 | | 50 | О, КР |
| Тема 6 | Комплексные числа | 36 | 1 | | 1 | | 34 | О, КР |
| Промежуточная аттестация | | 4 | | | | | | зачет |
| Итого за 2 сессию | | 134 | 2 | | 4 | | 124 | |
| Тема 7 | | 22 | 1 | | 1 | | 20 | О, КР |
| Тема 8 | | 26 | 1 | | 1 | | 24 | О, КР |
| Тема 9 | | 24 | 1 | | 1 | | 22 | О, КР |
| Тема 10 | | 24 | 1 | | 1 | | 22 | О, КР |
| Тема 11 | | 24 | 1 | | 1 | | 22 | О, КР |
| Тема 12 | | 22 | 1 | | 1 | | 20 | О, КР |
| Консультация | | 2 | | | | | | |
| Промежуточная аттестация | | 36 | | | | | | экзамен |
| Итого за 3 сессию | | 180 | 6 | | 6 | | 130 | |
| Всего: | | 324 (9 ЗЕ) | 12 | | 12 | | 258 | |

Примечание: 4 – формы текущего контроля успеваемости: опрос (О), тестирование (Т), контрольная работа (КР), коллоквиум (К), эссе (Э), реферат (Р), диспут (Д) и др.

Самостоятельная работа (СР) по изучению дисциплины осуществляется с применением ДОТ. Доступ к ДОТ осуществляется каждым обучающимся самостоятельно с любого устройства на портале: <https://lms.ranepa.ru>. Пароль и логин к личному кабинету/профилю/учетной записи предоставляется обучающемуся деканатом.

3. 2. Содержание дисциплины (модуля)

Тема 1. Элементы теории множеств.

Понятия множества, способы задания и графического представления, операции над множествами. Действительные числа и их основные свойства. Метрическое пространство.

Тема 2. Матрицы и определители.

Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами. Определители квадратных матриц. Свойства определителей. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Основные понятия и определения. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера. Метод Гаусса. Система m линейных уравнений с n переменными. Системы линейных однородных уравнений.

Тема 4. Векторы на плоскости и в пространстве.

Понятия n -мерного вектора и векторного пространства. Скалярное и векторное произведение. Размерность и базис векторного (линейного) пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Линейные преобразования (операторы). Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии.

Системы координат. Простейшие задачи аналитической геометрии. Алгебраические линии первого порядка. Уравнение прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых и точек. Алгебраические линии второго порядка. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола. Плоскость и прямая в пространстве.

Тема 6. Комплексные числа.

Модели представления комплексных чисел. Алгебраическая форма представления комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел.

Тема 7. Функции одной переменной.

Понятие функции. Основные свойства функций и их классификация. Элементарные функции. Преобразование графиков. Понятие числовой последовательности. Предел функции и числовой последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Непрерывность функции.

Тема 8. Дифференциальное исчисление ФОП.

Понятие производной функции. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Производные неявной и параметрически заданной функции. Понятие производных высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Понятие о дифференциалах высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функций. Характерные точки функций и характерные линии их графиков (экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке и интервале, выпуклость функции, точки перегиба, асимптоты графика функции). Общая схема исследования функций и построения их графиков.

Тема 9. Интегральное исчисление ФОП.

Понятия первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Методы интегрирования (метод замены переменной, метод интегрирования по частям, интегрирование простейших рациональных дробей, интегрирование некоторых видов иррациональностей, интегрирование тригонометрических функций). Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определенного интеграла (замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле). Геометрические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Тема 10. Функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Частные производные и полный дифференциал функции. Производная по направлению, градиент функции. Экстремумы функции многих переменных, необходимое и достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Понятие двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Геометрическая интерпретация двойного интеграла.

Тема 11. Дифференциальные уравнения.

Основные понятия. Общие и частные решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши (условие существования и единственности решения). Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Тема 12. Ряды.

Понятие числового ряда. Основные свойства рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Признак сходимости Лейбница для знакочередующегося ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов. Радиус сходимости степенного ряда. Ряды Маклорена и Тейлора.

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации

В ходе реализации дисциплины Б1.О.33.01 «Математика» используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

| № п/п | Наименование тем (разделов) | Методы текущего контроля успеваемости |
|----------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| очная форма | | |
| Тема 1 | Элементы теории множеств | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 2 | Матрицы и определители | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 3 | Системы линейных уравнений | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 4 | Векторы на плоскости и в пространстве | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 5 | Элементы аналитической геометрии | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 6 | Комплексные числа | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 7 | Функции одной переменной | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 8 | Дифференциальное исчисление | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 9 | Интегральное исчисление | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 10 | Функции нескольких переменных | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 11 | Дифференциальные уравнения. | Устный опрос, контрольная работа |
| Тема 12 | Ряды | Устный опрос, контрольная работа |
| заочная форма | | |
| Тема 1 | Элементы теории множеств | Устный опрос |
| Тема 2 | Матрицы и определители | Устный опрос |
| Тема 3 | Системы линейных уравнений | Устный опрос |
| Тема 4 | Векторы на плоскости и в пространстве | Устный опрос |
| Тема 5 | Элементы аналитической геометрии | Устный опрос |
| Тема 6 | Комплексные числа | Устный опрос |
| Тема 7 | Функции одной переменной | Устный опрос |
| Тема 8 | Дифференциальное исчисление | Устный опрос |
| Тема 9 | Интегральное исчисление | Устный опрос |
| Тема 10 | Функции нескольких переменных | Устный опрос |
| Тема 11 | Дифференциальные уравнения. | Устный опрос |
| Тема 12 | Ряды | Устный опрос |

4.2. Типовые материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

Вопросы для опроса и решения задач

1 семестр

Тема 1. Элементы теории множеств.

Вопросы для устного опроса:

1. Понятия множества.
2. Способы задания и графического представления.
3. Операции над множествами.
4. Действительные числа и их основные свойства.
5. Метрическое пространство.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Равны ли следующие множества:

а) $\{2, 4, 5\}$ и $\{2, 4, 5, 2\}$; **б)** $\{1, 2\}$ и $\{\{1, 2\}\}$;

в) $\{1, 2, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; **г)** $\{\{1, 2\}, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$;

3. Пусть даны множества: $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 5\}$, $Y = \{1, 2, 4\}$, $Z = \{2, 5\}$.

Найти множества:

а) $X \cap Y'$; **б)** $(X \cap Z) \cup Y'$; **в)** $X \cup (Y \cap Z)$.

на дом

г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; **д)** $(X \cup Y)'$; **е)** $X' \cap Y'$.

4. Начертить диаграммы Венна, иллюстрирующие построение множеств, и показать, что эти утверждения не всегда верны:

а) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$; **б)** $(A \setminus B) \cup B = A$; **в)** $(A \cap B) \setminus A = \emptyset$;

на дом

г) $(A \cup B) \setminus B = A$; **д)** $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$.

5. Определить множества $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ и изобразить их на числовой оси (плоскости), если

а) $A = (-1, 2]$; $B = [1, 4)$;

б) $A = \{x: -4 < x < 1\}$; $B = \{x: 0 < x < 4\}$.

в) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$, где \mathbb{R}^2 – вещественная плоскость.

на дом

г) $A = \{x: x^2 - x - 2 > 0\}$; $B = \{x: 6x - x^2 > 0\}$;

д) $A = \{x: \sin \pi x = 0\}$; $B = \{x: \cos \pi x / 2 = 0\}$.

6. Доказать, что на множестве \mathbb{R}^6 имеются единственные ноль и единица.

7. Решить уравнения:

а) $|-5| - |2 + 8| = -12$; **б)** $|5 + | + 2|| = 10$; **в)** $|| + | - 1| + | - 2| - 2,5 = 0$;

на дом

$$) + || - 2 = 0;) | + 1| + || + | - 1| = 6;) + 2| - | + 1| - (+ 1)|| + 1 = 0.$$

. Пусть $E = \{b, c, d, e, f\}$, $A = \{b, c, d\}$, $B = \{c, e\}$.

Начертить диаграмму Венна, иллюстрирующую построение этих множеств.

. Описать множество $A = \{ | - 3 - 4 \leq 0 \}$ перечислением ее элементов.

10. Считая отрезок $[0,1]$ универсальным множеством, найти и изобразить на числовой прямой дополнения множеств:

$$) \{0, 1\};) (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}); \text{ на дом }) (0, \frac{1}{2}];) \{0\} [\frac{3}{4}, 1).$$

11. Доказать, что для множеств A, B, C

$$) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);) A \setminus B = A \cap B'$$

надом

$$) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);) (A \setminus B) \cup (A \cap B') = A.$$

12. Доказать, что

$$) \text{ уравнение } x + y = a \text{ имеет единственное решение } x = -a + b$$

на дом

$$) \text{ уравнение } ax = b \text{ имеет единственное решение } x = \frac{b}{a}$$

13. Решить (доказать) неравенства:

$$) || - 1| - 5| \geq + + 8;) |x - y| \geq || - ||;$$

надом

$$) | - 3 + 2| + |2 + 1| \geq 5;) | + + \dots + | \geq | - (| + | + \dots + |).$$

Тема 2. Матрицы и определители.

Вопросы для устного опроса:

1. Определение матрицы. Классификация матриц.
2. Транспонирование матриц.
3. Сложение и умножение матриц.
4. Определители второго и третьего порядков.
5. Вычисление определителей различными способами.
6. Использование свойств определителей при их вычислении.
7. Алгоритм вычисления обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
8. Алгоритм вычисления обратной матрицы присоединением справа единичной матрицы того же порядка.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Даны матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Указать, какие из нижеприведенных операций выполнимы, и выполнить их.

а) $A + B$; б) $A^T + B$; в) $A + B^T$; г) $A^T + B^T$; д) AB ; е) $A^T B$; ж) AB^T ; з) BA^T .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на дом

3. Найти матрицу $C = -5A + 2B$:

$$4) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad 6) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найти произведение матриц:

$$4) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{или} \quad 6) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 93 \\ 30 & -120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найти из произведений матриц AB и BA , которые существуют:

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad 6) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Вычислить определители:

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad 8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad 7) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad 9) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 10) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Вычислить матрицу $D = (AB)' - C^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad 3) \text{ Вычислить матрицу } D = ABC - 3E:$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, E - \text{ единичная матрица}$$

$$3) \text{ Вычислить } A^{-1}, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Найти матрицу A^n и ее след:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow c) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$$

5. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Убедитесь, что определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Доказать тождества:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (b-a)(a-b)(a-b), \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (b-a)(b-a)(a-b)$$

8. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти определитель матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{на дом} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{или} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

разлагая его по элементам
третьей строки

разлагая его по элементам
первого столбца

3. Вычислить определители:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Вычислить матрицу $B = 11(A^{-1})' + A'$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: с помощью присоединенной матрицы и элементарных преобразований:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найти матрицу, обратную матрице C , если она существует

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{на дом} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{на дом} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Найти ранги матриц

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Найти максимальное число линейно независимых строк матриц:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Найти максимальное число линейно независимых столбцов матриц:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Показать, что сумма произведений элементов третьего столбца матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов первого столбца равна нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

11. Решить задачи с экономическим содержанием:

а) В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m \times n}$ задает объем продукции на каждом заводе в первом квартале, а матрица $B_{m \times n}$ — во втором; (a_{ij}, b_{ij}) — объемы продукции j -го типа на i -ом заводе в первом и втором кварталах соответственно.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти: объемы продукции; прирост объемов продукции во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в евро), если λ — курс евро по отношению к рублю.

б) Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска которых заданы матрицей $A_{1 \times n}$. Цена реализации единицы i -го типа продукции в j -ом регионе задана матрицей $B_{n \times k}$, где k — число регионов, в которых реализуется продукция.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу выручки C по регионам, если $A_{13} = (100 \ 200 \ 100)$,
на дом

в) Три завода выпускают четыре вида продукции.

Необходимо найти: матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3 ; матрицы прироста выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

г) Найти C — матрицу выручки C по регионам по условиям задачи бб), если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Вопросы для устного опроса:

1. Допустимые преобразования систем линейных уравнений.
2. Множество решений системы.
3. Формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Использование обратной матрицы для нахождения решения системы линейных уравнений.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Решить системы уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x + y + 3z = 5, \\ x - 2y - z = 2, \\ 3x + 4y - 2z = 11. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x - \sqrt{2}y = 0, \\ 2\sqrt{2}x - 3y = -10. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x + 2y + z = -8, \\ 2x + 3y + z = -1, \\ 2x + y + 3z = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.

Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 8, \\ 4x + 2y + 6z = 8, \\ x + 3y - 4z = -1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 4y = 2, \\ 3x + y + 2z = -3, \\ -x + y + z = 3. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 3x + y - 4z = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

на дом

$$\begin{aligned}
 & \text{г) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 4, \\ x + 3y + 4z = 7, \\ -3x + 2y - 6z = 3. \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} 3x + y + z = 1, \\ x + 2y = 3, \\ 3x + 3y + z = 3. \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 4x - y + 2z = 9, \\ 2x + 3y - 4z = 4, \\ 3x + 6y - 2z = 18. \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } AX = C, \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на дом

$$\text{г) } X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 22 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \end{cases} \quad \text{или иначе} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

3. Решить (любым методом) системы уравнений, заданные в виде $AX = B$, где A – матрица системы; B – столбец свободных членов:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{или иначе} \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
1. Найти базисные и общие решения систем уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$
$$\text{или иначе} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Найти фундаментальные системы решений систем линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\text{или иначе} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Типовые задания для контрольной работы

Решите систему линейных уравнений указанным способом:

- а) с помощью формул Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 23, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 19. \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -28. \end{cases}$$

в) с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Тема 4. Векторы на плоскости и в пространстве.

Вопросы для устного опроса:

1. Операции над векторами, заданными в координатной форме.
2. Нахождение угла между двумя векторами.
3. Скалярное произведение векторов.
4. Вычисление собственных чисел и собственных векторов линейных операторов.
5. Составление квадратичных форм.
6. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность.
7. Разложение вектора по базису.
8. Векторное произведение векторов и его свойства.
9. Смешанное произведение векторов и его свойства.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти косинус угла между векторами x и y , принадлежащими трехмерному евклидову пространству с ортонормированным базисом.

$$\text{а) } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{на дом б) } x = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить задачи:

а) Даны векторы $a = 2m + 4n$, $b = m - n$, где m, n единичные векторы, образующие угол 120° .

Найти угол между векторами a и b .

б) Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $a = -2j + k$, $b = 2i + j$.

в) Даны длины векторов $|a| = 11$, $|b| = 23$, $|a - b| = 30$. Определить $|a + b|$.

на дом

г) В плоскости находятся три вектора a , b и c . Известно, что $|a| = 2$, $|b| = 3$, $|c| = 5$, угол между векторами a и b равен 60° , а угол между векторами b и c тоже 60° . Найти длину вектора $d = -a + b - c$.

д) Определить длины векторов, на которых построен параллелограмм с диагоналями $c = 2i - j + 3k$, $d = 2i - 2j + 4k$.

е) При каких значениях α и β векторы $a = -2i + 3j + \beta k$ и $b = \alpha i - 6j + 2k$, будут коллинеарны, ортогональны.

4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\phi = \pi/4$.

на дом

Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c} = -\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{d} = 3\vec{m} - \vec{n}$, если $|m| = 5$, $|\vec{n}| = 4$, $\phi = \pi/6$.

5. Даны вершины треугольника $A(0; 2; 0)$, $B(-2; 5; 0)$, $C(-2; 2; 6)$. Найти его площадь.

на дом

Проверить, будут ли коллинеарными следующие векторы: $\vec{c} (4, -2; 1)$, $\vec{d} (8; -4; 4)$.

6. Решить задачи:

а) Выяснить, является ли линейным пространством множество всех алгебраических многочленов одной переменной: степени не выше n , степени n , степени выше n ?

б) Выяснить, является ли линейным пространством множество всех решений системы n линейных однородных уравнений с n переменными?

на дом

в) Выяснить, является ли линейным пространством множество: всех матриц размера $m \times n$, диагональных матриц порядка n , невырожденных матриц порядка n , векторов?

г) Каким должно быть число a , чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось линейным пространством?

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Решить задачи:

а) Даны три вектора $a = (2; -2)$, $b = (2; -1)$, $c = (2; 4)$. Найти координаты вектора $p = 2a - b + c$ и разложить его по векторам a и b .

б) Найти длину вектора $a = 2i + 3j - 6k$ и его направляющие косинусы.

в) Найти проекцию вектора $a = i + j + 2k$ на вектор $b = i - j + 4k$.

на дом

г) Даны четыре вектора $a = (2; 1; 0)$, $b = (1; -1; 2)$, $c = (2; 2; -1)$, $d = (3; 7; -7)$. Разложить a по векторам b , c и d .

д) Вектор составляет с осями Oy и Oz углы соответственно 60° и 120° . Какой угол он составляет с осью Ox .

е) Даны векторы $a = 3i - 6j - k$, $b = i + 4j - 5k$ и $c = 3i + 4j + 2k$. Найти проекцию вектора $a + c$ на вектор $b + c$.

3. Найти векторное произведение векторов $a = 2i + 3j - k$, $b = 3i - j - 4k$.

на дом

Будут ли коллинеарны $c_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$; $c_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторы построенные по векторам:

$\vec{a}_1 = (2, 1, 1)$ и $\vec{a}_2 = (0, 3, 1)$

4. Решить задачи:

- а) В некотором базисе заданы векторы $a_1 = (-2; 0; 1)$, $a_2 = (1; -1; 0)$, $a_3 = (0; 1; 2)$. Выяснить, является ли вектор $a_4 = (2; 3; 4)$ линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3 .
- б) Выяснить являются ли линейно зависимыми или линейно независимыми векторы:
 $a_1 = (-7; 5; 19)$, $a_2 = (-5; 7; -7)$, $a_3 = (-8; 7; 14)$.
- в) Выяснить, образуют ли базис трехмерного пространства R^3 векторы: $a_1 = (1; 1; 1)$, $a_2 = (1; 0; 1)$, $a_3 = (2; 1; 2)$.

на дом

- г) В некотором базисе заданы векторы $a_1 = (2; 1)$, $a_2 = (-1; 3)$. Найти все значения m , при которых вектор $b = (1; m)$ в том же базисе является линейной комбинацией векторов a_1 и a_2 .
- д) Выяснить являются ли линейно зависимыми или линейно независимыми векторы:
 $a_1 = (1; 8; -1)$, $a_2 = (-2; 3; 3)$, $a_3 = (4; -11; 9)$.
- е) Выяснить, образуют ли базис четырехмерного пространства R^4 векторы:
 $a_1 = (1; 1; 1; 1)$, $a_2 = (1; 0; 1; 0)$, $a_3 = (0; -1; 0; 1)$, $a_4 = (1; 0; 0; 1)$.

5. Решить задачи:

- а) Дана матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

от базиса (e_1, e_2) к базису (e^*_1, e^*_2) . Найти координаты векторов e_1, e_2 в базисе (e^*_1, e^*_2) .

- б) Дана матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e^*_1, e^*_2, e^*_3) . Найти координаты вектора e^*_2 в базисе (e_1, e_2, e_3) .

на дом

- в) Дана матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e^*_1, e^*_2, e^*_3) . Найти координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе (e^*_1, e^*_2, e^*_3) .

- г) Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) к базису (e_3, e_4, e_2, e_1) .

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего каждый вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ в вектор } y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{на дом} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ в вектор } y = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_3 \\ x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего каждый вектор x двухмерного векторного пространства в вектор y по следующему алгоритму:

- а) симметричное отображение относительно прямой $x_1 = x_2$;

б) симметричное отображение относительно прямой $x_1 = 0$, а затем симметричное отображение относительно начала координат.

на дом

в) симметричное отображение относительно прямой $x_1 = -x_2$.

г) поворот на 45° по часовой стрелке;

д) симметричное отображение относительно начала координат, а затем симметричное отображение относительно прямой $x_2 = 0$.

4. Выяснить является ли оператор $\tilde{A}(x)$ линейным, если вектор $x = (x_1; x_2; x_3)$:

$$\tilde{A}(x) = (x_2 - 2x_3; x_1 + x_2; x_1) \quad \text{на дом} \quad \tilde{A}(x) = (x_1 x_2; x_2 x_3; x_1 x_3).$$

5. Найти координаты вектора $y = \tilde{A}(x)$, если оператор \tilde{A} задан матрицей A (в этом базисе):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{на дом} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Найти матрицу A^* линейного оператора в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , заданного матрицей A в базисе (e_1, e_2, e_3) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} e_1^* = e_1 \\ e_2^* = e_2 + e_1 \end{matrix} \quad \text{на дом} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} e_1^* = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2^* = 2e_2 - e_3 + 2e_1 \\ e_3^* = 2e_3 + e_2 \end{matrix}$$

Занятие 4

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора \tilde{A} (матрица A):

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{на дом} \quad c) A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad d) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Найти базис, в котором линейный оператор \tilde{A} , задаваемый матрицей A , имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{на дом} \quad B) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица A . Если приводится, то записать ее диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{на дом} \quad B) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Написать квадратичную форму L в матричном виде:

$$L = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \quad \text{на дом} \quad L = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 + 5x_1 x_3.$$

6. Найти ранг квадратичной формы L :

$$L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 \quad \text{на дом} \quad L = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2 + 6x_1 x_3.$$

7. Найти квадратичную форму, полученную из данной указанным преобразованием:

$$\begin{aligned} L &= 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 \\ L &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

8. Привести к каноническому виду квадратичные формы:

$$L = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \quad \text{на дом} \quad L = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

9. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму L :

$$L = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 \quad \text{на дом} \quad L = -2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2.$$

10. Найти все значения параметра m , при которых положительно (отрицательно) определены квадратичные формы L :

$$L = 2x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \quad (L = -x_1^2 + mx_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3)$$

на дом

$$L = mx_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \quad (L = -2x_1^2 - 2x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3).$$

Типовые задания для контрольной работы

- Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{c}_1 = 3\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a} = [1; -2; 3]$, $\vec{b} = [3; 0; -1]$?
- Найдите косинус угла между векторами \vec{AB} и \vec{AC} , если $A(1; -2; 3)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$.
- Даны векторы $\vec{a} = [1; -2; 3]$ и $\vec{b} = [3; 4; -1]$. Найдите векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.
- Докажите, что точки $A(5; 7; 2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.
- Найдите объем пирамиды $ABCD$ и длину высоты, опущенной на грань BCD , если вершины имеют координаты $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.
- Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $-3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 30^\circ$.
- Найдите скалярное и векторное произведение векторов $2\vec{a} + \vec{b}$ и $-\vec{a} + 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии.

Вопросы для устного опроса:

- Прямая на плоскости.
- Уравнения прямой на плоскости: общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой, проходящей через две точки, параметрические уравнения прямой, уравнение прямой с нормальным вектором.
- Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
- Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
- Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.
- Плоскость в пространстве.

7. Уравнения плоскости: общее уравнение, уравнение плоскости в отрезках, уравнение плоскости, проходящей через три точки, параметрические уравнения плоскости, уравнение плоскости с нормальным вектором.
8. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
9. Угол между плоскостями.
10. Расстояние от точки до плоскости.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Решить задачи:
 - а) На оси абсцисс найти точку, отстоящую на расстояние $d = 10$ от точки $A(2, 6)$.
 - б) На осях абсцисс и ординат найти точки, равноудаленные от точек $A(2, 3)$ и $B(5, 6)$.
 - в) Даны три вершины параллелограмма: точки $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, $C(-1, 3)$. Определить четвертую вершину D , противоположную B .
 - г) Точки $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, -1)$ – середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.
 - д) Найти центр масс однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(2, 4)$, $B(0, 1)$, $C(4, -2)$.
 - е) Лежат ли на одной прямой три данные точки $A(2, 0)$, $B(6, 4)$, $C(11, 9)$.

на дом

- ж) Отрезок, ограниченный точками $A(1, -3)$ и $B(4, 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
- з) Даны вершины треугольника: $A(3, 5)$, $B(-3, 3)$, $C(5, -8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C .
- и) Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек: $M_1(-4, 3)$ и $M_2(2, 5)$.
- к) Составить уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4, 0)$.
- л) Составить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0, -1)$, чем к точке $B(0, -4)$.
- м) Треугольник координатами вершин: $A(3, 5)$, $B(9, -3)$, $C(0, 1)$. Найти длину биссектрисы угла A .

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Решить задачи:
 - а) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-4, 1)$ параллельно осям координат.
 - б) Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-4, 2)$ и $B(3, -1)$.
 - в) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(2, 3)$ под углом 45° к прямой $5x + 2y - 4 = 0$.
 - г) Через вершины треугольника $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(0, 4)$ проведены прямые параллельно противоположным сторонам. Составить их уравнение.
 - д) Даны середины сторон треугольника $P(1, 2)$, $Q(5, -1)$, $R(-4, 3)$. Составить уравнения его сторон.

е) Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$.

на дом

ж) Найти угол между прямой $3x + y - 6 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(-3, 1)$ и $B(3, 3)$.

з) Дана прямая $2x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1, 3)$: параллельно данной прямой; перпендикулярно данной прямой.

и) Даны две прямые $y = 3x - 2$ и $3x - y + 12 = 0$. Составить уравнение прямой, проведенной параллельно данным на равном расстоянии между ними.

к) Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярно к прямой $x = 2y$.

л) Составить уравнение перпендикуляра к прямой $8x + 4y - 3 = 0$ в точке пересечения ее с прямой $x - y = 0$.

Типовые задания для контрольной работы:

Дан треугольник ABC , $A(4; 1)$, $B(-4; 7)$, $C(-3; 2)$. Найти:

1. длину стороны AB ;
2. угол A (градусная мера);
3. уравнение стороны AB ;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
5. уравнение высоты, проведенной из вершины C , и её длину;
6. площадь ΔABC .

Построить данный треугольник.

Тема 6. Комплексные числа.

Вопросы для устного опроса:

1. Модели представления комплексных чисел.
2. Алгебраическая форма представления комплексных чисел.
3. Тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Даны комплексные числа $z_1 = 15 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найти: а) $z_1 \pm z_2$; б) $z_1 z_2$; в) z_1 / z_2 .

3. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Представить в тригонометрической форме и найти:

а) $z_1 z_2$; б) z_1^{28}

на дом

в) z_1 / z_2 ; г) $\sqrt[3]{z_2}$.

4. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ представить в показательной форме и найти: а) $z_1 z_2$; б) z_1 / z_2 .

на дом

Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ представить в показательной форме и найти: а) $z_1 z_2$; б) z_1 / z_2 .

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Построить множество точек z по условиям:
 - а) $|z| < 3$; б) $|z| < 2$ и $\pi/2 < \varphi < \pi$ **на дом** в) $2 < |z| < 4$ и $-\pi < \varphi < \pi/2$.
3. Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$. **на дом** Вычислить $(4 - 3i) / (4 + 3i)$.
4. Даны комплексные числа $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + \sqrt{5}i$. Представить в тригонометрической форме и экспоненциальной форме и изобразить на комплексной плоскости эти числа, а также $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 .

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Даны комплексные числа $z_1 = 5 - 12i$, $z_2 = -6 + 8i$. Найти: а) $z_1 \pm z_2$; б) $z_1 z_2$; в) z_1 / z_2 .
3. Вычислить:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } (1+i)^2, (1-i)^2, \text{ б) } \frac{(1+i)^2}{1-i}, \text{ в) } (1-i)^2, \text{ г) } (1+i)^2 + (1-i)^2, \text{ д) } \sqrt{1-i}, \text{ е) } \sqrt{1+i}
 \end{aligned}$$

4. Решить уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } z^2 + 1 = 0, \text{ б) } z^2 + 2z + 2 = 0, \text{ в) } z^2 + 17z^2 + 16 = 0 \\
 & \text{г) } z^2 + 1 = 0, \text{ д) } z^2 + 2z + 2 = 0, \text{ е) } z^2 + 17z^2 + 16 = 0
 \end{aligned}$$

2 семестр

Тема 7. Функции одной переменной.

Вопросы для устного опроса:

1. Определение предела.
2. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.
3. Свойства пределов последовательностей.
4. Основные методы нахождения пределов.
5. Окрестность точки.
6. Вычисление предела функции.
7. Применение свойств пределов функций.
8. Неопределенности различных видов.
9. Основные способы раскрытия неопределенностей.
10. Замечательные пределы.
11. Нахождение пределов функции с помощью замечательных пределов.
12. Приращение аргумента, приращение функции.
13. Непрерывность. Свойства непрерывных функций.

14. Классификация точек разрыва. Устранимые и неустраняемые точки разрыва.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Определить области существования и области значений следующих функций:

а) $y = \sqrt{3x - x^3}$; б) $y = \log(x^2 - 4)$; в) $y = \sin(\sqrt{x})$

на дом

г) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; д) $y = \log_2 \log_4 x$; е) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

3. Построить график функции $y = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Построить графики функций:

а) $y = \sqrt{x - x^3}$; б) $y = \log_2(x^2 - 4)$; в) $y = \sin(\sqrt{x})$; г) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; д) $y = \log_2 \log_4 x$; е) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

на дом

а) $y = \sqrt{x - x^3}$; б) $y = \log_2(x^2 - 4)$; в) $y = \sin(\sqrt{x})$; г) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; д) $y = \log_2 \log_4 x$; е) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

5. Найти:

а) $f[f(x)]$, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$; б) $f(x)$, если $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$;

на дом

$f(x)$, если $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

6. Найти:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

на дом

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

7. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

8. Найти пределы:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{x - \sin x} \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) \\ & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x^2 + x} \end{aligned}$$

на дом

$$\begin{aligned} & \text{з) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x^3 - 10}{x^2 - 10} \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \quad \text{к) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{0}{x^2-9} \right) \\ & \text{м) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} \end{aligned}$$

9. Найти пределы:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^3 x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin^2 x) \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x} \right) \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x+1} \right) \end{aligned}$$

на дом

$$\begin{aligned} & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{16x} \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^2 \quad \text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{1-x} \right)^2 \end{aligned}$$

Типовые задания для контрольной работы:

Вычислите пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{10x^2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{5x}}$;
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 1}{4x^2 + 4x^5 + 17}$
5. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3x}{x^2-9} \right)$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x - 3} - \sqrt{x^2 - 6x - 8} \right)$;
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{10x^2}$;
8. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{5x}}$.

Тема 8. Дифференциальное исчисление ФОП.

Вопросы для устного опроса:

1. Дифференцирование. Производная.
2. Геометрический и физический смысл производной.
3. Правила дифференцирования. Таблица производных от элементарных функций.
4. Понятие о производных высших порядков.
5. Применение производной для вычисления пределов (правило Лопиталья).
6. Необходимые и достаточные условия возрастания или убывания функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.
7. Вогнутость и выпуклость графика функции.
8. Точка перегиба. Достаточные условия вогнутости (выпуклости) графика.
9. Исследование функций с последующим построением графика.
10. Определение функции двух и нескольких переменных.
11. Частные производные первого и второго порядков.

12. Полный дифференциал функции нескольких переменных.

13. Экстремум функции нескольких переменных.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Найти производные функций:

$$\begin{aligned} & a) y = x^2 \ln^2 x \quad b) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad c) y = x^2 \ln x \quad d) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad e) y = \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

на дом

$$\begin{aligned} & a) y = \sqrt{x^2 + 1} \quad b) y = \sqrt{x^2 - 1} \quad c) y = \sqrt{x^2 + 1} \quad d) y = \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

3. Найти производные функций и вычислить их значения при $x = x_0$:

$$\begin{aligned} & a) y = \sqrt{x^2 + 1} \quad b) y = \ln(x^2 + 1) \quad c) y = \sqrt{x^2 + 1} \quad d) y = \ln(x^2 + 1) \quad e) y = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 3x^2$ в заданной точке $M(-2, 12)$.

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Найти первую и вторую производные функций:

$$y = \ln(\operatorname{tg} x^2) \quad \text{на дом} \quad y = 5^x + \sqrt{(x - \ln x)}$$

3. Найти производные x'_y обратных функций:

$$\begin{aligned} & a) y = \operatorname{tg} x \quad b) y = \operatorname{arctg} x \quad c) y = \ln x \quad d) y = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. Найти производные y'_x от неявных функций:

$$\begin{aligned} & a) x + y - 4 = 0 \quad b) x^2 + y^2 = 0 \end{aligned}$$

5. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \frac{1}{t-1} \end{cases} \end{aligned}$$

6. Найти дифференциалы первого порядка функций:

$$\begin{aligned} & a) y = \frac{1}{x^2} \ln \frac{x-1}{x+1} \quad b) y = \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

7. Найти дифференциалы второго порядка функций:

$$y = 3x^3 - 7x^2 + 1 \quad \text{найти } y'' \text{ и } y''^2$$

8. Найти производные n -го порядка функций:

$$y = x^2 \quad \text{найти } y^{(n)}$$

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Найти дифференциалы второго порядка функций:

$$a) y = \sin x \quad \text{найти } y'' \quad \text{и} \quad b) y = x^3 - 5x^2 + 3x \quad \text{найти } y''$$

3. Решить задачи:

а) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 8 / (4 + x^2)$ в точке $x = 2$ и в точке пересечения с осью **Oy**.

б) Составить уравнения касательных к кривой $y = x^3 + 2x + 1$, перпендикулярных прямой $5y + x - 4 = 0$.

на дом

в) Составить уравнения касательных к кривой $y = (2x - 7) / (x - 3)$, параллельных прямой $4x - y - 2 = 0$, перпендикулярных прямой $2x + 2y - 5 = 0$.

4. Исследовать функции и построить их графики

$$a) y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad ; \quad б) y = x + \frac{1}{x}$$

на дом

$$a) y = \frac{3\sqrt{x}}{3x+1} \quad ; \quad б) y = x^{2/3} (1 - 3x)$$

Занятие 4

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Исследовать функции и построить их графики:

$$a) y = 2xe^{-x/2} \quad ; \quad б) y = \frac{x^2}{4} - 2x^4 \quad ; \quad \text{на дом} \quad y = x^2 + 2\sqrt{-x}$$

3. Решить задачи:

а) Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = (4t + 3) / (t + 4)$, где s измеряется в метрах, at — в секундах. Найти скорость и ускорение тела в момент $t = 6$.

б) Тело движется прямолинейно по закону $s(t)$. Определить скорость и ускорение тела в указанный момент времени t_0 : $s(t) = t^3 - 2t^2 - t$; *на дом* $s(t) = (2t + 1) / (t + 3)$; $t_0 = 7$.

на дом

в) Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $h(t) = 9t - 2t^2$.

Найти начальную скорость и ускорение тела ($t_0 = 0$) и максимальную высоту подъема, при которой скорость $v(t) = 0$.

4*. Решить задачи с экономическим содержанием:

Объем продукции u (ед.), произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением

$$u(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 100t + 100 \quad (t \geq 0), \quad \text{где } t \text{ — рабочее время, часы.}$$

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

на дом

Объем производства зимней обуви u (ед.), выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением

$$u(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 100t + 100 \quad (t \geq 0), \quad \text{где } t \text{ — календарный месяц года.}$$

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения в начале года ($t = 0$) и в конце года ($t = 12$).

Типовые задания для контрольной работы:

Исследуйте свойства функции $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ и постройте ее график.

Тема 9. Интегральное исчисление ФОП.

Вопросы для устного опроса:

1. Первообразная функция. Определение неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенных интегралов. Таблица стандартных интегралов.
3. Непосредственное интегрирование.
4. Метод замены переменных.
5. Метод интегрирования по частям.
6. Определение определенного интеграла.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Свойства определенных интегралов.
9. Непосредственное интегрирование для определенных интегралов.
10. Метод замены переменных для определенных интегралов.
11. Метод интегрирования по частям для определенных интегралов.
12. Вычисление площади плоской фигуры.
13. Вычисление объема тела вращения.
14. Вычисление пройденного пути.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} ; \quad \text{б) } \int \frac{3x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx ; \quad \text{на дом в) } \int e^x 5^{4x} dx .$$

3. Решить задачи:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx ; \quad \text{б) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx ; \quad \text{на дом в) } \int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + 1} dx$$

4. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной

$$\text{а) } \int \frac{2x}{1+x^4} dx ; \quad \text{б) } \int \frac{\ln^2 x}{x} dx ; \quad \text{на дом в) } \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx .$$

5. Решить задачи:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} ; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} ; \quad \text{на дом в) } \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} ; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x^2 + 1} ; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x^2 - 1} ; \quad \text{на дом в) } \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} ; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

3. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx ; \quad \text{б) } \int x^2 \ln x dx$$

$$\text{в) } \int \sqrt{2-x^2} dx ; \quad \text{г) } \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$$

на дом

4. Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей:

$$\text{а) } \int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x+1)} ; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

на дом

$$a) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)(x + 2)} \quad b) \int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 10} dx$$

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти неопределенные интегралы:

$$a) \int \ln(1 - x) dx \quad b) \int x \sin 3x dx \quad c) \int \frac{dx}{x^2 + 2x}$$

на дом

$$d) \int \ln(1 + x^2) dx \quad e) \int \frac{\ln x}{(x + 1)^2} dx \quad f) \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

3. Вычислить определенные интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{2 \ln(x+1)}{x} dx \quad b) \int_0^1 x \ln x dx \quad c) \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 3x + 1}}$$

на дом

$$d) \int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx \quad e) \int_0^1 x \sin x \cos x dx$$

4. Найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

$$y = -x^2 + 3, y = 0 \quad \text{на дом} \quad y = -x^2 + 4x, y = 2x$$

Занятие 4

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

$$y = x^2 - 2x, y = 4x - x^2$$

на дом

$$y = x^2, y = \sqrt{x}$$

$$y = x^2 + 1, y = 1, y = 2, y = 0$$

на дом

$$y = 1 + 2x - x^2, y = x + 1$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

на дом

$$а) \int (x^2 - 2x + 1) dx, \int (2x - 1) dx; б) \int (x^2 + 1)^2 dx, \int x^2 dx + 1.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$а) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \quad б) \int_0^5 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

4. Вычислить интегралы (если они сходятся):

$$а) \int_0^1 \frac{dx}{x^2}; \quad б) \int_1^2 \frac{dx}{x^2}; \quad в) \int_1^2 \frac{dx}{x^3}$$

на дом

$$а) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 1}; \quad б) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 1}; \quad в) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}; \quad г) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4}$$

Типовые задания для контрольной работы:

Вычислите интегралы:

1. $\int (2x^3 - 3x + 1) dx$;

2. $\int \frac{3x^3 dx}{\cos^2 x^4}$;

3. $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 2) dx$;

4. $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} dx$;

5. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Тема 10. Функции нескольких переменных.

Вопросы для устного опроса:

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Предел и непрерывность функции. Частные производные и полный дифференциал функции.
3. Производная по направлению, градиент функции.
4. Экстремумы функции многих переменных, необходимое и достаточное условие экстремума.
5. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
6. Понятие двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному.
7. Геометрическая интерпретация двойного интеграла.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Найти частные производные функций двух переменных $z = x^2 y - \cos^2 xy$.

3. Найти частные производные функций:

$$a) z = x^2 + y^2 + z^2; \quad b) z = x^2 + y^2; \quad c) z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d) z = \ln(x^2 + y^2 + 1); \quad e) z = \ln(x^2 + y^2); \quad f) z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4. Полагая, что произвольная функция f дифференцируема, проверить следующие равенства:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = f(x^2 + y^2)$$

на дом

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \quad z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$$

5. Найти производные функций по заданным направлениям l :

а) $z = 3x^4 - xy + y^2$; l составляет с осью Ox угол 60° .

б) $z = x + y^2$; l — биссектриса первого координатного угла.

на дом

в) $z = 5x^4 - 3x - y - 1$ в точке $M(2;1)$; l — прямая MN , где $N(5,5)$.

6. Найти градиент функции $z = f(x,y)$ и его модуль для функций в указанных точках M :

а) $z = 7 - x^2 - y^2$; $M(2;2)$. *на дом* б) $z = xye^{1+x+y}$; $M(0;-1)$; в) $z = \sin(x + y^2)$

7. Найти величину градиента функции в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad M(1, 2, 1)$$

на дом

$$f(x, y, z) = xyz, \quad M(1, 1, 1)$$

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Исследовать функции на экстремум:

а) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$; б) $z = xy(1 - x - y)$;

на дом

в) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$; г) $z = e^{y/2}(x^2 + y)$.

3. Исследовать функции на условный экстремум:

а) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x^2 + y^2 = 1$; б) $z = x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

в) $z = x + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$; г) $z = \frac{x - y + 1}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

4. Найти точки локального экстремума функции и проверить в них выполнение достаточного условия экстремума:

а) $z = 2x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 4y - 2$.

Занятие 3

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Вычислить двойные интегралы $\iint_G f(x, y) dx dy$ по области G , заданной границами

а) $f(x, y) = xy$, $G: \{y=0, y=x, x=1\}$;

б) $f(x, y) = x + y^2$, $G: \{y=x, y=x^2\}$

на дом

$f(x, y) = x - y$, G – треугольник с вершинами (1, 1), (4, 1), (4, 4).

3. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint_D (x + y^2) dx dy$, где D ограничена прямыми $y=0, y=1, x=0, x=1$.

б) $\iint_D e^{-x} dx dy$, где D ограничена кривыми $y=0, x=1$ и кривой $y=e^{-x}$ при $x \in [0, 1]$.

на дом

в) $\iint_D \frac{1}{x^2} dx dy$, где D ограничена кривыми $y=0, y=x^2, x=2$.

г) $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$, где D ограничена кривыми $y=0, y=1, x^2=y^2$ при $x \in [0, 1]$.

4. С помощью двойного интеграла найти площадь, ограниченную следующими кривыми:

$$xy=1, \quad x+y=2,5$$

на дом

$$y^2=2x+1, \quad y^2=-2x+1$$

Тема 11. Дифференциальные уравнения.

Вопросы для устного опроса:

1. Понятие о дифференциальном уравнении и его решении.
2. Общее и частное решения. Задача Коши.
3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Способы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка.
4. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.

2. Решить задачи:

а) Показать, что функция $y = 2\operatorname{tg}(2x - 1)$ удовлетворяет уравнению $y'' = 2yy'$.

б) Показать, что функция $y = 2e^{3x} - e^{-3x}$ удовлетворяет уравнению $yy''' = y'y''$.

на дом

в) Показать, что функция $y = (1 - x^2/4) \cdot \cos x + (1 + x/4) \cdot \sin x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y = x \cdot \sin x$.

3. Проверить, что функции являются интегралами дифференциальных уравнений:

а) $y^2 - 2xy' = 2x^2$, $y^2 - 2xy' = 2x^2$; б) $y^2 - 2xy' = 2x^2$, $y^2 - 2xy' = 2x^2$;
в) $y^2 - 2xy' = 2x^2$, $y^2 - 2xy' = 2x^2$; г) $y^2 - 2xy' = 2x^2$, $y^2 - 2xy' = 2x^2$;

4. При каких значениях параметра a следующие функции являются решениями (интегралами) дифференциальных уравнений:

а) $y^2 - 2xy' = 2x^2$, $y^2 - 2xy' = 2x^2$; б) $y^2 - 2xy' = 2x^2$, $y^2 - 2xy' = 2x^2$;

5. Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

а) $y = Cx^2$, б) $y^2 = Cx^2 + 2x$; в) $y = Cx + C^2$, г) $y^2 = Cx^2 + 2x$;

6. Решить дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

а) $y' = -\frac{2xy^2}{x^2-1}$; б) $y' + \frac{y}{x} = 0$;

на дом

в) $x^2 y' - \sqrt{x} \cos^2 y = 0$.

7. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(3x - 1)dy + y^2 dx = 0$; б) $y' = (x + y)^2$; в) $y' = \sqrt{1 + 2x - 1}$

на дом

г) д) $x^2(y' - 1) = 2y'$; е) $y'e^{-x} = x - 1$.

8. Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

а) $x(1 + x^2)y' + y^2 = 1 - (x^2 + 1)y$, $y(1) = -1$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{y}y' = x + y$, $y(1) = 1$.
 в) $x^2(2y' - 1) = 1$, $y(1) = 0$; г) $xy' + \sin y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

9. Решить однородные дифференциальные уравнения:

а) $xy' - x^2y' = y^2$; б) $xy' + y = \frac{y}{x}$; в) $xy' + y = (x^2 + y^2)y'$; г) $y' = \frac{1 - 2x - 2y}{1 + x + y}$

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Найти общие решения дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$; б) $y' - 2xy = e^{x^2}$

на дом

в) $y' + x^2 y = x^2$.

3. Решить уравнения:

а) $4x^2 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$; б) $1 - 2xy + y^2y' = 0$; в) $y^2 + 2y + y^2y' = 0$; г) $x^2 + xy + y^2y' = 0$.

4. Решить уравнения:

а) $x^2y' = \frac{y}{x}$; б) $xy'' = y^2 \ln \frac{y}{x}$; в) $xy'' - y'(1 + y) = 0$; г) $xy'' = x^2y'^2$.

5. Решить уравнения:

а) $y'' - 2y' + 2y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 2e^x$; в) $y'' + y' = 0$; г) $xy'' + y' = 0$;
 д) $y'' + y = 0$; е) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{x^2 + 1}$

2. Найти решение дифференциальных уравнений второго порядка

а) $xy'' + y' = 0$; б) $y'' + 3y' = 5x + 1$;

на дом

в) $y'' + 2y' = (3x + 7)e^x$; г) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

6. Решить уравнения:

а) $y'' + y' - 2y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$; в) $y'' + y' - 2y = 0$; г) $y'' + y' - 2y = 0$;

7. Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; б) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
в) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; г) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

8. Решить задачи с экономическим содержанием:

Изменения численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением: $y' = 0,3y(2 - 10^{-4}y)$, где $y = y(t)$ - время в годах.

В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

на дом

Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$q = 23 - 2p$; $\frac{dq}{dt} = \dots$; $q = 13 - p$; $\frac{dq}{dt} = \dots$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

Типовые задания для контрольной работы:

Найдите общее решение дифференциальных уравнений и при необходимости решите задачу Коши:

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
2. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$;
3. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$, $y(1) = 1$;
4. $y'' + y' - 2y = 0$;
5. $y'' + 2y' + y = 0$;
6. $y'' - 4y' + 5y = 0$;
7. $y'' - 3y' = 1 + 6x$;
8. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$;

Тема 12. Ряды.

Вопросы для устного опроса:

1. Основные понятия и определения. Определение сходимости ряда.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда. Признаки сравнения. Признак Даламбера. Признаки Коши.
3. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

4. Определение функционального ряда. Область сходимости. Определение степенного ряда. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Исследование степенного ряда на сходимость.
5. Ряды Тейлора и Маклорена. Свойства сходящихся степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды. Формула и ряд Тейлора. Формула и ряд Маклорена. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Практические задания:

Занятие 1

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Доказать непосредственно сходимость рядов и найти их суммы

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

на дом

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

3. Найти частичную сумму ряда S_n . В случае сходимости ряда найти его сумму S :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

4. Исследовать сходимость знакопостоянного числового ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$;

на дом

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

5. С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{10^n+11} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+12} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+10}{n^2}$$

Занятие 2

Цель: дать знания положений изучаемого курса и привить навыки применения математических методов решения задач, в том числе, в сфере профессиональной деятельности.

1. Повторение определений основных понятий темы в форме контрольного опроса и проверка самостоятельной работы по выполнению домашнего задания.
2. Исследовать сходимость рядов:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2} \\ & \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+12n}{n^2+n^2+1} \end{aligned}$$

3. Исследовать сходимость ряда (абсолютную или условную):

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-10^n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

на дом

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-10^{2n}}{n^2+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$.

4. Найти область сходимости степенных рядов:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-10)^{n^2} \frac{x^n}{n} \\ & \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)} \end{aligned}$$

5. Разложить функции в ряд Маклорена и найти радиус сходимости ряда:

а) $f(x) = (1+x)^n$;

на дом

б) $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}$.

6. Разложить в степенной ряд по степеням x следующие функции:

а) e^{-x^2} ; б) $e^{-1/x}$; в) e^{-1/x^2} ; г) e^{-1/x^3} ; д) e^{-1/x^4} ; е) e^{-1/x^5} ;

6. Применяя разложение подынтегральной функции в ряд по степеням x и его почленное интегрирование, найти разложение в ряд функций:

а) $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$; б) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$.

Типовые задания для контрольной работы:

1. Найдите сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(5n-2)(5n+3)}$.

2. Исследуйте числовые ряды на сходимость, применяя необходимый признак сходимости или признаки сравнения:

$$\text{а) } \frac{5}{2} + \frac{7}{5} + \frac{9}{8} + \frac{11}{11} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n-1} \quad ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} .$$

3. Исследуйте степенные ряды на сходимость:

$$\text{А) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (-2; 2) \quad ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n} \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

Шкала оценивания

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при устном ответе во время проведения текущего контроля определяется баллами в диапазоне 0-100 %. Критериями оценивания при проведении устного опроса является демонстрация основных теоретических положений, в рамках осваиваемой компетенции, умение применять полученные знания на практике, овладение навыками анализа и систематизации информации в области финансов.

Тестирование

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при устном ответе во время проведения текущего контроля определяется баллами в диапазоне 0 – 100%. Критерием оценивания при проведении тестирования, является количество верных ответов, которые дал студент на вопросы теста. При расчете количества баллов, полученных студентом по итогам тестирования, используется следующая формула:

$$B = \frac{B}{O} \times 100\%$$

где B – количество баллов, полученных студентом по итогам тестирования;

B – количество верных ответов, данных студентом на вопросы теста;

O – общее количество вопросов в тесте.

Решение задач

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при устном ответе во время проведения текущего контроля определяется баллами в диапазоне 0 – 100 %. Критерием оценивания при проведении тестирования, является количество верных ответов, которые дал студент на вопросы теста. При расчете количества баллов, полученных студентом по итогам тестирования, используется следующая формула:

$$B = \frac{B}{O} \times 100\%$$

где B – количество баллов, полученных студентом по итогам тестирования;

B – количество верных ответов, данных студентом на вопросы теста;

O – общее количество вопросов в тесте.

5. Оценочные материалы промежуточной аттестации по дисциплине

5.1. Методы проведения зачета и экзамена

Зачет и экзамен проводятся с применением следующих методов: метод устного опроса по вопросам из перечня примерных вопросов из п. 5.2.

5.2. Оценочные материалы промежуточной аттестации

| Компонент компетенции | Промежуточный / ключевой индикатор оценивания | Критерий оценивания |
|--|--|---|
| ПК _{О2} ОС-1 Способен использовать методы математического анализа для решения прикладных задач | Способен выбирать методы математического анализа для решения прикладных задач | выбирает методы математического анализа для решения прикладных задач |
| | Способен осуществлять математический анализ с применением выбранных методов для решения прикладных задач | осуществляет математический анализ с применением выбранных методов для решения прикладных задач |

Типовые оценочные средства промежуточной аттестации

Вопросы к зачету и экзамену по дисциплине «Математика»

Вопросы к зачету (1 семестр)

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители и их свойства.
3. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.
4. Системы линейных уравнений, основные определения.
5. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Исследование и решение систем линейных уравнений с помощью определителей. Формулы Крамера.
7. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
9. Векторы. Основные понятия. Проекция вектора на вектор и ее свойства. Линейные операции над векторами.
10. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Координаты вектора.
11. Действия над векторами в координатах, направляющие косинусы вектора. Свойства направляющих косинусов.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства. Условие перпендикулярности векторов.
13. Векторное произведение векторов и его свойства. Условие коллинеарности векторов.
14. Геометрический смысл векторного произведения.
15. Смешанное произведение векторов и его свойства. Условие компланарности векторов.
16. Геометрический смысл смешанного произведения.

17. Понятие об n -мерном векторе. Операции над n -мерными векторами. Понятие об n -мерном пространстве.
18. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис n -мерного пространства.
19. Способы задания прямой на плоскости. Основные уравнения.
20. Взаимное расположение прямых на плоскости.
21. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола.
22. Способы задания прямой в пространстве. Основные уравнения.
23. Взаимное расположение прямых в пространстве.
24. Общее уравнение плоскости. Особые случаи (неполные уравнения).
25. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
26. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
27. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
28. Комплексные числа, действия над ними.
29. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.
30. Различные формы комплексного числа и действия над ними.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Функция. Область определения функции. Способы задания функции.
2. Свойства функции (четность, нечетность, периодичность, возрастание, убывание, монотонность).
3. Предел функции.
4. Односторонние пределы функции.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Их свойства.
7. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема об эквивалентных бесконечно малых.
8. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
9. Непрерывность функции в точке и на отрезке.
10. Приращение аргумента и приращение функции. Второе определение непрерывной функции.
11. Точки разрыва функции и их классификация.
12. Свойства непрерывных функций.
13. Понятие производной функции.
14. Дифференцируемость функции. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
15. Основные правила дифференцирования.
16. Сложная функция и ее производная.
17. Производная функции, заданной неявно.
18. Понятие дифференциала функции и его геометрический смысл.
19. Производные функции высших порядков.
20. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Уравнение нормали к графику функции.
21. Правило Лопиталя.
22. Теорема о наибольшем и наименьшем значениях функции на отрезке.
23. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума в точке. Признаки монотонности функции.
24. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба. Признаки выпуклости и вогнутости кривой.
25. Асимптоты графика функции. Наклонные и вертикальные асимптоты.
26. Общая схема исследования функции и построение графика.

27. Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
28. Основные методы интегрирования.
29. Интегрирование рациональных алгебраических дробей.
30. Интегрирование тригонометрических функций.
31. Определённый интеграл. Свойства определённого интеграла.
32. Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
33. Приложения определённых интегралов.
34. Функции двух переменных. Понятие о множестве (линии) уровня функции двух переменных.
35. Частные производные и частные дифференциалы. Геометрическая и экономическая интерпретация частных производных.
36. Теорема о равенстве смешанных частных производных.
37. Производная по направлению. Градиент ФНП.
38. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
39. Понятие дифференциального уравнения, порядок, общий вид, общее и частное решения. Задача Коши.
40. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Методы их решения.
41. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, основные определения. Общее и частное решения, их геометрическая интерпретация. Задача Коши.
42. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.
43. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
44. Понятие числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда и следствие из него.
45. Гармонический ряд. Ряд геометрической прогрессии.
46. Признаки сравнения. Признак Даламбера. Признаки Коши.
47. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница.
48. Абсолютная и условная сходимость.
49. Область сходимости функционального ряда.
50. Определение степенного ряда.
51. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
52. Исследование степенного ряда на сходимость.
53. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.
54. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.
55. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Шкала оценивания

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при устном ответе во время промежуточной аттестации определяется оценками «зачтено», «не зачтено», «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Критериями оценивания на зачете и экзамене является демонстрация основных теоретических положений в рамках осваиваемой компетенции, умение применять полученные знания на практике, овладение навыками решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности.

Для дисциплин, формой промежуточной аттестации которых является зачет / экзамен, приняты следующие соответствия:

– 90-100% – «зачтено» / «отлично» (5);

- 75-89% – «зачтено» / «хорошо» (4);
- 60-74% – «зачтено» / «удовлетворительно» (3);
- менее 60% – «не зачтено» / «неудовлетворительно» (2).

При оценивании результатов обучения используется следующая шкала оценок:

| | |
|--|--|
| 100% – 90% (отлично, зачтено) | Этапы компетенции, предусмотренные образовательной программой, сформированы на высоком уровне. Свободное владение материалом, выявление межпредметных связей. Уверенное владение понятийным аппаратом дисциплины. Практические навыки профессиональной деятельности сформированы на высоком уровне. Способность к самостоятельному нестандартному решению практических задач |
| 89% – 75% (хорошо, зачтено) | Этапы компетенции, предусмотренные образовательной программой, сформированы достаточно. Детальное воспроизведение учебного материала. Практические навыки профессиональной деятельности в значительной мере сформированы. Присутствуют навыки самостоятельного решения практических задач с отдельными элементами творчества. |
| 74% – 60% (удовлетворительно, зачтено) | Этапы компетенции, предусмотренные образовательной программой, сформированы на минимальном уровне. Наличие минимально допустимого уровня в усвоении учебного материала, в т.ч. в самостоятельном решении практических задач. Практические навыки профессиональной деятельности сформированы не в полной мере. |
| менее 60% (неудовлетворительно, не зачтено) | Этапы компетенции, предусмотренные образовательной программой, не сформированы. Недостаточный уровень усвоения понятийного аппарата и наличие фрагментарных знаний по дисциплине. Отсутствие минимально допустимого уровня в самостоятельном решении практических задач. Практические навыки профессиональной деятельности не сформированы. |

Фонды оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине представлены в приложении 1.

6. Методические материалы по освоению дисциплины

Рекомендации по планированию и организации времени, необходимого на изучение дисциплины

Структура времени, необходимого на изучение дисциплины

| Форма изучения дисциплины | Время, затрачиваемое на изучение дисциплины, % |
|--|--|
| Изучение литературы, рекомендованной в учебной программе | 40 |
| Решение задач, практических упражнений и ситуационных примеров | 40 |
| Изучение тем, выносимых на самостоятельное рассмотрение | 20 |
| Итого | 100 |

Методические рекомендации по подготовке к практическому (семинарскому) занятию

Практическое (семинарское) занятие – одна из основных форм организации учебного процесса, представляющая собой коллективное обсуждение студентами теоретических и практических вопросов, решение практических задач под руководством преподавателя. Основной целью практического (семинарского) занятия является проверка глубины понимания студентом изучаемой темы, учебного материала и умения изложить его содержание ясным и четким языком, развитие самостоятельного мышления и творческой активности у студента. На практических (семинарских) занятиях предполагается рассматривать наиболее важные, существенные, сложные вопросы которые, наиболее трудно усваиваются студентами. При этом готовиться к практическому (семинарскому) занятию всегда нужно заранее. Подготовка к практическому (семинарскому) занятию включает в себя следующее:

- обязательное ознакомление с планом занятия, в котором содержатся основные вопросы, выносимые на обсуждение;
- изучение конспектов лекций, соответствующих разделов учебника, учебного пособия, содержания рекомендованных нормативных правовых актов;
- работа с основными терминами (рекомендуется их выучить);
- изучение дополнительной литературы по теме занятия, делая при этом необходимые выписки, которые понадобятся при обсуждении на семинаре;
- формулирование своего мнения по каждому вопросу и аргументированное его обоснование;
- запись возникших во время самостоятельной работы с учебниками и научной литературы вопросов, чтобы затем на семинаре получить на них ответы;
- обращение за консультацией к преподавателю.

Практические (семинарские) занятия включают в себя и специально подготовленные рефераты, выступления по какой-либо сложной или особо актуальной проблеме, решение задач. На практическом (семинарском) занятии студент проявляет свое знание предмета, корректирует информацию, полученную в процессе лекционных и внеаудиторных занятий, формирует определенный образ в глазах преподавателя, получает навыки устной речи и культуры дискуссии, навыки практического решения задач.

Рекомендации по изучению методических материалов

Методические материалы по дисциплине позволяют студенту оптимальным образом организовать процесс изучения данной дисциплины. Методические материалы по дисциплине призваны помочь студенту понять специфику изучаемого материала, а в конечном итоге – максимально полно и качественно его освоить. В первую очередь студент должен осознать предназначение методических материалов: структуру, цели и задачи. Для этого он знакомится с преамбулой, оглавлением методических материалов, говоря иначе, осуществляет первичное знакомство с ним. В разделе, посвященном методическим рекомендациям по изучению дисциплины, приводятся советы по планированию и организации необходимого для изучения дисциплины времени, описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»), рекомендации по работе с литературой, советы по подготовке к экзамену и разъяснения по поводу работы с тестовой системой курса и над домашними заданиями. В целом данные методические рекомендации способны облегчить изучение студентами дисциплины и помочь успешно сдать экзамен. В разделе, содержащем учебно-методические материалы дисциплины, содержание практических занятий по дисциплине.

Рекомендации по самостоятельной работе студентов

На самостоятельную работу студентов по дисциплине Б1.О.33.01 «Математика» выносятся следующие темы:

| № п/п | Тема | Вопросы, выносимые на СРС | Очная форма | Заочная форма |
|-------|--|---|-------------|---------------|
| 1 | Элементы теории множеств | Метрическое пространство. | О, КР | О |
| 2 | Матрицы и определители | Определители матриц и их свойства. | О, КР | О |
| 3 | Системы линейных уравнений | Решение СЛУ методом Жордана-Гаусса. | О, КР | О |
| 4 | Векторы на плоскости и в пространстве | 1. Действия над векторами. 2. Размерность и базис векторного пространства. 3. Евклидово пространство, его свойства. Применение векторного и смешанного произведения векторов. | О, КР | О |
| 5 | Комплексные числа | 1. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Решение уравнений. 2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме. 3. Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в показательной форме. | О, КР | О |
| 6 | Элементы аналитической геометрии. | 1. Кривые второго порядка. 2. Уравнение поверхности в пространстве. | О, КР | О |
| 7 | Функции одной переменной | 1. Непрерывность функции. 2. Точки разрыва. 3. Свойства непрерывной функции. | О, КР | О |
| 8 | Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных. | 1. Основные теоремы дифференциального исчисления. 2. Асимптоты графика функции. 3. Понятие функции нескольких переменных. 4. Частные производные первого и порядка функции нескольких переменных. 5. Полный дифференциал функции нескольких переменных. | О, КР | О |
| 9 | Интегральное исчисле- | 1. Свойства неопределенного интеграла. | О, КР | О |

| | | | | |
|----|-------------------------------|--|-------|---|
| | нис. | 2. Способы вычисления неопределенного интеграла. 3. Понятие определенного интеграла. 4. Свойства определенного интеграла. 5. Вычисление площади плоской фигуры. 6. Вычисление объема тела вращения. 7. Вычисление пройденного пути. | | |
| 10 | Ряды | 1. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. 2. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций. 3. Применение рядов в приближенных вычислениях. | О, КР | |
| 9 | Функции нескольких переменных | 1. Условный экстремум. 2. Метод множителей Лагранжа. | О, КР | О |
| 10 | Дифференциальные уравнения. | 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Способы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. 2. Дифференциальные уравнения 2-го порядка: допускающие понижение порядка, линейные с постоянными коэффициентами. | О, КР | О |

Неотъемлемым элементом учебного процесса является самостоятельная работа студента. При самостоятельной работе достигается конкретное усвоение учебного материала, развиваются теоретические способности, столь важные для современной подготовки специалистов. Формы самостоятельной работы студентов по дисциплине: написание конспектов, подготовка ответов к вопросам, написание рефератов, решение задач, исследовательская работа, выполнение контрольной работы.

Задания для самостоятельной работы включают в себя комплекс аналитических заданий, выполнение которых предполагает тщательное изучение научной и учебной литературы, периодических изданий, а также законодательных и нормативных документов предлагаемых в п. 7 «Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине». Задания предоставляются на проверку в печатном виде.

Рекомендации по работе с литературой

При изучении курса учебной дисциплины особое внимание следует обратить на рекомендуемую основную и дополнительную литературу.

Важным элементом подготовки к семинару является глубокое изучение основной и дополнительной литературы, рекомендованной по теме занятия, а также первоисточников. При этом полезно прочитанную литературу законспектировать. Конспект должен отвечать трем требованиям: быть содержательным, по возможности кратким и правильно оформленным.

Содержательным его следует считать в том случае, если он передает все основные мысли авторов в целостном виде. Изложить текст кратко – это значит передать содержание книги, статьи в значительной мере своими словами. При этом следует придерживаться правила – записывать мысль автора работы лишь после того, как она хорошо понята. В таком случае поставленная цель будет достигнута. Цитировать авторов изучаемых работ (с обязательной ссылкой на источник) следует в тех случаях, если надо записывать очень важное определение или положение, обобщающий вывод.

Важно и внешнее оформление конспекта. В его начале надо указать тему семинара, дату написания, названия литературных источников, которые будут законспектированы. Глубокая самостоятельная работа над ними обеспечит успешное усвоение изучаемой дисциплины.

Одним из важнейших средств серьезного овладения теорией является **конспектирование первоисточников**.

Для составления конспекта рекомендуется сначала прочитать работу целиком, чтобы уяснить ее общий смысл и содержание. При этом можно сделать пометки о ее структуре, об основных положениях, выводах, надо стараться отличать в тексте основное от второстепенного, выводы от аргументов и доказательств. Если есть непонятные слова, надо в энциклопедическом словаре найти, что это слово обозначает. Закончив чтение (параграфа, главы, статьи) надо задать себе вопросы такого рода: В чем главная мысль? Каковы основные звенья доказательства ее? Что вытекает из утверждений автора? Как это согласуется с тем, что уже знаете о прочитанном из других источников?

Ясность и отчетливость восприятия текста зависит от многого: от сосредоточенности студента, от техники чтения, от настойчивости, от яркости воображения, от техники фиксирования прочитанного, наконец, от эрудиции – общей и в конкретно рассматриваемой проблеме.

Результатом первоначального чтения должен быть простой **план текста и четкое представление о неясных местах**, отмеченных в книге. После предварительного ознакомления, при повторном чтении следует **выделить основные мысли автора** и их развитие в произведении, обратить внимание на обоснование отдельных положений, на методы и формы доказательства, наиболее яркие примеры. В ходе этой работы окончательно отбирается материал для записи и определяется ее вид: **план, тезисы, конспект**.

План это краткий, последовательный перечень основных мыслей автора. Запись прочитанного в виде тезисов – это выявление и запись опорных мыслей текста. Разница между планом и тезисами заключается в следующем: в плане мысль называется (ставь всегда вопрос: о чем говорится?), в тезисах – формулируется – (что именно об этом говорится?). Запись опорных мыслей текста важна, но полного представления о прочитанном на основании подобной записи не составишь. Важно осмыслить, как автор доказывает свою мысль, как убеждает в истинности своих выводов. Так возникает конспект. Форма записи, как мы уже отметили, усложняется в зависимости от целей работы: план – о чем?; тезисы – о чем? что именно?; конспект – о чем? что именно? как?

Конспект – это краткое последовательное изложение содержания. Основу его составляет план, тезисы и выписки. Недостатки конспектирования: многословие, цитирование не основных, а связующих мыслей, стремление сохранить стилистическую связанность текста в ущерб его логической стройности. Приступать к конспектированию необходимо тогда, когда сложились навыки составления записи в виде развернутого подробного плана.

Форма записи при конспектировании требует особого внимания: важно, чтобы собственные утверждения, размышления над прочитанным, четко отделялись при записи. Разумнее выносить свои пометки на широкие поля, записывать на них дополнительные справочные данные, помогающие усвоению текста (дата события, упомянутого авторами; сведения о лице, названном в книге; точное содержание термина). Если конспектируется текст внушительного объема, необходимо указывать страницы книги, которые охватывает та или иная часть конспекта.

Для удобства пользования своими записями важно озаглавить крупные части конспекта, подчеркивая **заголовки**. Следует помнить о назначении красной строки, стремиться к четкой графике записей – уступами, колонками. Излагать главные мысли автора и их систему аргументов необходимо преимущественно своими словами, перерабатывая таким образом информацию, – так проходит уяснение ее сути. Мысль, фразы, понятия в контексте, могут приобрести более пространное изложение в записи. Но текст оригинала свертывается, и студент, отрабатывая логическое мышление, учится выделять главное и обобщать однотипные суждения, однородные факты. Кроме того, делая записи своими словами, обобщая, студент учится письменной речи.

Знание общей стратегии чтения, техники составления плана и тезисов определяет и технологию конспектирования:

- внимательно читать текст, попутно отмечая непонятные места, незнакомые термины и понятия. **Выписать на поля** значение отмеченных понятий.
- при первом чтении текста необходимо составить его **простой план**, последовательный перечень основных мыслей автора.
- при повторном чтении текста выделять **систему доказательств** основных положений работы автора.
- заключительный этап работы с текстом состоит в осмыслении ранее отмеченных мест и их краткой последовательной записи.
- при конспектировании нужно стремиться **выразить мысль автора своими словами**, это помогает более глубокому усвоению текста.
- в рамках работы над первоисточником важен умелый **отбор цитат**. Необходимо учитывать, насколько ярко, оригинально, сжато изложена мысль. Цитировать необходимо те суждения, на которые впоследствии возможна ссылка как на авторитетное изложение мнения, вывода по тому или иному вопросу.

Конспектировать целесообразно не на отдельном листе, а в общей тетради на одной странице листа. Обратная сторона листа может быть использована для дополнений, необходимость которых выяснится в дальнейшем. При конспектировании литературы следует оставить широкие поля, чтобы записать на них план конспекта. Поля могут быть использованы также для записи своих замечаний, дополнений, вопросов. При выступлении на семинаре студент может пользоваться своим конспектом для цитирования первоисточника. Все обучающиеся внимательно слушают выступления одногруппников, отмечают спорные или ошибочные положения в них, вносят поправки, представляют свои решения и обоснования обсуждаемых проблем.

В конце семинара, когда преподаватель подводит итоги занятия, студенты с учетом рекомендаций преподавателя и выступлений сокурсников дополняют или исправляют свои конспекты.

Рекомендации по изучению методических материалов

Методические материалы по дисциплине позволяют студенту оптимальным образом организовать процесс изучения данной дисциплины. Методические материалы по дисциплине призваны помочь студенту понять специфику изучаемого материала, а в конечном итоге – максимально полно и качественно его освоить. В первую очередь студент должен осознать предназначение методических материалов: структуру, цели и задачи. Для этого он знакомится с преамбулой, оглавлением методических материалов, говоря иначе, осуществляет первичное знакомство с ним. В разделе, посвященном методическим рекомендациям по изучению дисциплины, приводятся советы по планированию и организации необходимого для изучения дисциплины времени, описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»), рекомендации по работе с литературой, советы по подготовке к экзамену и разъяснения по поводу работы с тестовой системой курса и над домашними заданиями. В целом данные методические рекомендации способны облегчить изучение студентами дисциплины и помочь успешно сдать экзамен. В разделе, содержащем учебно-методические материалы дисциплины, содержание практических занятий по дисциплине, словарь основных терминов дисциплины.

Рекомендации для подготовки к зачету / экзамену

При подготовке к зачету / экзамену студент внимательно просматривает вопросы, предусмотренные рабочей программой, и знакомится с рекомендованной основной

литературой. Основой для сдачи экзамена студентом является изучение конспектов лекций, прослушанных в течение семестра, информация, полученная в результате самостоятельной работы в течение семестра.

7. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Основная литература

1. Математика для экономистов. Практикум : учебное пособие для вузов / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 285 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8868-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511190>
2. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 447 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510530>
3. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 248 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07889-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/513025>
4. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 305 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07891-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/513026>

7.2. Дополнительная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510750>
2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Задачник : учебное пособие для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 192 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7568-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511713>
3. Ключин, В. Л. Высшая математика для экономистов. Задачи, тесты, упражнения : учебник и практикум для вузов / В. Л. Ключин. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 165 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-03124-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510653>

7.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

7.4. Нормативные правовые документы

7.5. Интернет-ресурсы

7.6. Другие источники

8. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает в себя:

- лекционные аудитории, оборудованные видеопроекционным оборудованием для презентаций, средствами звуковоспроизведения, экраном;
- помещения для проведения семинарских и практических занятий, оборудованные учебной мебелью;

Дисциплина должна быть поддержана соответствующими лицензионными программными продуктами.

Программные средства обеспечения учебного процесса должны включать:

- программы презентационной графики;
- текстовые и табличные редакторы.

Вуз обеспечивает каждого обучающегося рабочим местом в компьютерном классе в соответствии с объемом изучаемых дисциплин, обеспечивает выход в сеть Интернет.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся включают следующую оснащенность: столы аудиторные, стулья, доски аудиторные, компьютеры с подключением к локальной сети института (включая правовые системы) и Интернет.

Для изучения учебной дисциплины используются автоматизированная библиотечная информационная система и электронные библиотечные системы: «Университетская библиотека ONLINE», «Электронно-библиотечная система издательства ЛАНЬ», «Электронно-библиотечная система издательства «Юрайт», «Электронно-библиотечная система IPRbooks», «Научная электронная библиотека eLIBRARY» и др.

Приложение 1

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Волгоградский институт управления – филиал РАНХиГС

Экономический факультет

кафедра информационных систем и математического моделирования

УТВЕРЖДЕНА
учёным советом
Волгоградского института управления –
филиала РАНХиГС
Протокол № 2 от 21.09.2023 г.

ПРОГРАММА СПЕЦИАЛИТЕТА

Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

(наименование образовательной программы)

ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.О.33.01 МАТЕМАТИКА

(индекс, наименование дисциплины (модуля), в соответствии с учебным планом)

краткое наименование дисциплины (модуля) (при наличии)

38.05.01 Экономическая безопасность

(код, наименование направления подготовки (специальности))

очная, заочная

(форма(ы) обучения)

Год набора – 2024

Волгоград, 2023 г.

1. Вопросы к зачету и экзамену по дисциплине «Математика»

Вопросы к зачету (1 семестр)

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители и их свойства.
3. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.
4. Системы линейных уравнений, основные определения.
5. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Исследование и решение систем линейных уравнений с помощью определителей. Формулы Крамера.
7. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
9. Векторы. Основные понятия. Проекция вектора на вектор и ее свойства. Линейные операции над векторами.
10. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Координаты вектора.
11. Действия над векторами в координатах, направляющие косинусы вектора. Свойства направляющих косинусов.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства. Условие перпендикулярности векторов.
13. Векторное произведение векторов и его свойства. Условие коллинеарности векторов.
14. Геометрический смысл векторного произведения.
15. Смешанное произведение векторов и его свойства. Условие компланарности векторов.
16. Геометрический смысл смешанного произведения.
17. Понятие об n -мерном векторе. Операции над n -мерными векторами. Понятие об n -мерном пространстве.
18. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис n -мерного пространства.
19. Способы задания прямой на плоскости. Основные уравнения.
20. Взаимное расположение прямых на плоскости.
21. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола.
22. Способы задания прямой в пространстве. Основные уравнения.
23. Взаимное расположение прямых в пространстве.
24. Общее уравнение плоскости. Особые случаи (неполные уравнения).
25. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
26. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
27. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
28. Комплексные числа, действия над ними.
29. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.
30. Различные формы комплексного числа и действия над ними.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Функция. Область определения функции. Способы задания функции.
2. Свойства функции (четность, нечетность, периодичность, возрастание, убывание, монотонность).
3. Предел функции.
4. Односторонние пределы функции.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Их свойства.
7. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема об эквивалентных бесконечно малых.

8. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
9. Непрерывность функции в точке и на отрезке.
10. Приращение аргумента и приращение функции. Второе определение непрерывной функции.
11. Точки разрыва функции и их классификация.
12. Свойства непрерывных функций.
13. Понятие производной функции.
14. Дифференцируемость функции. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
15. Основные правила дифференцирования.
16. Сложная функция и ее производная.
17. Производная функции, заданной неявно.
18. Понятие дифференциала функции и его геометрический смысл.
19. Производные функции высших порядков.
20. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Уравнение нормали к графику функции.
21. Правило Лопиталя.
22. Теорема о наибольшем и наименьшем значениях функции на отрезке.
23. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума в точке. Признаки монотонности функции.
24. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба. Признаки выпуклости и вогнутости кривой.
25. Асимптоты графика функции. Наклонные и вертикальные асимптоты.
26. Общая схема исследования функции и построение графика.
27. Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
28. Основные методы интегрирования.
29. Интегрирование рациональных алгебраических дробей.
30. Интегрирование тригонометрических функций.
31. Определённый интеграл. Свойства определённого интеграла.
32. Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
33. Приложения определённых интегралов.
34. Функции двух переменных. Понятие о множестве (линии) уровня функции двух переменных.
35. Частные производные и частные дифференциалы. Геометрическая и экономическая интерпретация частных производных.
36. Теорема о равенстве смешанных частных производных.
37. Производная по направлению. Градиент ФНП.
38. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
39. Понятие дифференциального уравнения, порядок, общий вид, общее и частное решения. Задача Коши.
40. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Методы их решения.
41. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, основные определения. Общее и частное решения, их геометрическая интерпретация. Задача Коши.
42. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.
43. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
44. Понятие числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда и следствие из него.
45. Гармонический ряд. Ряд геометрической прогрессии.
46. Признаки сравнения. Признак Даламбера. Признаки Коши.
47. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.

48. Абсолютная и условная сходимость.
49. Область сходимости функционального ряда.
50. Определение степенного ряда.
51. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
52. Исследование степенного ряда на сходимость.
53. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.
54. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.
55. Применение рядов в приближенных вычислениях.

2. Тестовые материалы

Вопросы для тестирования

$$\begin{array}{ccc} & 2 & -1 & 3 \\ & | & & | \\ & 4 & 7 & 5 \\ \hline 1. \text{ Определитель} & -6 & 3 & -9 \end{array} \text{ равен}$$

а. -120 б. 8 в. 0 г. -3

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 1 & 0 \\ & | & & | \\ & 0 & 2 & 3 \\ & | & & | \\ & 0 & 0 & 4 \end{array} \text{ равен}$$

а. 0 б. 9 в. 24 г. 12

$$\begin{array}{ccc} & 0 & -3 & 0 \\ & | & & | \\ & 2 & 0 & -2 \\ \hline 3. \text{ Определитель} & k & 4 & 2 \end{array} \text{ равен нулю при } k, \text{ равном}$$

а. 2 б. -3 в. 0 г. -2

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A - 2B$ имеет вид ...

а. $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 6 & -5 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix} -14 & 6 & 9 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид

а. $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} 5 & 15 & 15 \end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

6. Произведение матриц с размерностями $2 \times m$ и $2k \times 3$ возможно при ...
 а. $m = 3, k = 1$ б. $m = 2, k = 1$ в. $m = 1, k = 2$ г. $m = 2, k = 3$

7. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$, то $x_0 + y_0$ равно...
 а. 2 б. 1 в. 3 г. 4

8. Производная функции $y = \sin(2x - 1)$ имеет вид...
 а. $2x \cos(2x - 1)$ б. $-\sin(x - 1)$ в. $2 \cos(2x - 1)$ г. $-2 \cos(2x - 1)$

9. Множество первообразных функции $f(x) = 2e^{3x}$ имеет вид...
 а. $-3e^{3x} + C$ б. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ в. $2e^{3x} + C$ г. $\frac{2}{3}e^{3x} + C$

10. На числовой прямой дана точка $x = 0,8$. Тогда ее « ε -окрестностью» может являться интервал
 а. $(0,8 ; 1,2)$ б. $(0,6 ; 1)$ в. $(0,4 ; 0,8)$ г. $(0,4 ; 0,9)$

11. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Тогда модуль вектора \vec{c} равен...
 а. 4 б. 3 в. 5 г. 0

12. На векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{j}$; $\vec{c} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$, как на сторонах, построена пирамида. Тогда ее объем равен...
 а. 4 б. 2 в. 8 г. 24

13. Модуль градиента функции $z = -\frac{x^2}{y}$ в точке $A(-2; 2)$ равен ...
 а. 3 б. $\sqrt{3}$ в. $\sqrt{17}$ г. $\sqrt{5}$

14. Общее решение дифференциального уравнения $y'' = e^{3x} + 5$ имеет вид ...
 а. $y = \frac{1}{3}e^{3x} + 5x + C$ б. $y = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$ в. $y = e^{3x} + x^2 + C_1x + C_2$ г. $y = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}x^2 + x$

15. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Сумма элементов матрицы BA , расположенных на ее главной диагонали, равна ...
 а. 1 б. -1 в. 2 г. -2

16. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ равно
 а. 2 б. -2 в. -4 г. 4

17. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 1}{4x^2 + 4x^5 + 17}$ равно
 а. 1,5 б. -1,5 в. 0,5 г. -0,5

18. Неопределенный интеграл $\int (2x^3 - 3x + 1) dx$ равен ...
 а. $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$ б. $\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + x + C$ в. $\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + x + C$ г. $\frac{3x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + x + C$

19. Неопределенный интеграл $\int \frac{3x^3 dx}{\cos^2 x^4}$ равен
 а. $3tgx^4 + C$ б. $4tgx^4 + C$ в. $\frac{3}{4}tgx^4 + C$ г. $tgx^4 + C$

20. Определенный интеграл $\int_1^5 (2x - 3) dx$ равен ...
 а. 11 б. 12 в. 13 г. 14

21. Определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} dx$ равен
 а. $\frac{5}{6}$ б. $\frac{1}{2}$ в. $\frac{2}{3}$ г. $\frac{4}{3}$

22. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 4y' + 4y = 0$ имеет вид ...
 а. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$ б. $y = C_1 y^{-4x} + C_2 e^{4x}$ в. $y = y^{2x} (C_1 + C_2 x)$ г. $y = y^{-2x} (C_1 + C_2 x)$

23. Функция $y = kx^4 + 7x$ является решением дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = 2x^3$. Тогда значение k равно ...
 а. $\frac{2}{5}$ б. $\frac{1}{2}$ в. 2 г. $\frac{2}{3}$

24. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ равно ...
 а. $\frac{1}{6}$ б. $\frac{1}{2}$ в. $\frac{1}{3}$ г. $\frac{2}{3}$

25. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + 2x^3 - 1}{5x^2 - 9x^6 + 17}$ равно
 а. $-\frac{2}{5}$ б. $\frac{2}{9}$ в. $\frac{2}{5}$ г. $-\frac{2}{9}$

26. Уравнение $y' - \frac{y}{x} = x^3 e^x$ является ...
- а. дифференциальным уравнением третьего порядка
 б. однородным дифференциальным уравнением первого порядка
 в. линейным дифференциальным уравнением первого порядка
 г. дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
27. Даны точки А(-2; 7) и В(6; -1). Тогда координаты середины отрезка АВ равны ...
- а. (3; -2) б. (3; 2) в. (2; 3) г. (-2; 3)
28. Даны точки А(-2; 8) и В(7; -1). Тогда координаты точки С, делящей отрезок АВ в отношении 2 : 1, равны ...
- а. (4; 2) б. (-2; -2) в. (2; 3) г. (-2; -3)
29. Дана прямая $3x + 4y - 12 = 0$. Ее уравнение в отрезках равно ...
- а. $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1$ б. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ в. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ г. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$
30. Угловой коэффициент прямой $3x - 4y - 12 = 0$ равен ...
- а. $-\frac{3}{4}$ б. $\frac{4}{3}$ в. $-\frac{4}{3}$ г. $\frac{3}{4}$
31. Прямые $5x - 4y - 3 = 0$ и $kx - 8y + 3 = 0$ параллельны при k , равном ...
- а. -10 б. 10 в. 5 г. -5
32. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}$ не имеет обратной при k , равном ...
- а. 2 б. -2 в. -4 г. 4
33. Производная функции $f(x) = (2x^3 - 5)^5$ имеет вид...
- а. $10x^2(2x^3 - 5)^4$ б. $5(2x^3 - 5)^4$ в. $60(2x^3 - 5)^4$ г. $30x^2(2x^3 - 5)^4$
34. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^3 - 5x$ в точке $x_0 = 1$, равен...
- а. 2 б. 1 в. -1 г. -2
35. Вторая производная функции $f(x) = \sin 2x$ имеет вид...
- а. $-\sin 2x$ б. $2 \cos 2x$ в. $-2 \sin 2x$ г. $-4 \sin 2x$
36. Даны точки А(-2; 7) и В(6; 1). Тогда длина отрезка АВ равна ...
- а. 10 б. 11 в. 9 г. 8

37. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Тогда расстояние между ее фокусами равно ...
- а. $\sqrt{5}$ б. $2\sqrt{5}$ в. $4\sqrt{5}$ г. 3
38. Прямые $5x - 4y - 3 = 0$ и $kx - 8y + 3 = 0$ перпендикулярны при k , равном ...
- а. $\frac{32}{5}$ б. $-\frac{32}{5}$ в. $\frac{4}{5}$ г. $-\frac{4}{5}$
39. Координаты точки, симметричной точке $A\left(3; -\frac{3\pi}{4}\right)$ (заданной в полярной системе координат) относительно полярного полюса, равны ...
- а. $B\left(3; \frac{3\pi}{4}\right)$ б. $B\left(-3; -\frac{3\pi}{4}\right)$ в. $B\left(-3; \frac{3\pi}{4}\right)$ г. $B\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$
40. Длина суммы векторов $\vec{a} = (3; -5; 8)$ и $\vec{b} = (-1; 1; -4)$ равна ...
- а. 36 б. 6 в. 10 г. 5

3. Открытые задания

1. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при k , равном ...
2. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$, то $x_0 + y_0$ равно ...
3. Производная функции $y = \sin(2x - 1)$ имеет вид ...
4. Множество первообразных функции $f(x) = 2e^{3x}$ имеет вид ...
5. На векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{j}$; $\vec{c} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$, как на сторонах, построена пирамида. Тогда ее объем равен ...
6. Модуль градиента функции $z = -\frac{x^2}{y}$ в точке $A(-2; 2)$ равен ...
7. Общее решение дифференциального уравнения $y'' = e^{3x} + 5$ имеет вид ...
8. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ равно ...

9. Даны точки $A(-2; 8)$ и $B(7; -1)$. Тогда координаты точки C , делящей отрезок AB в отношении $2 : 1$, равны ...

10. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Тогда расстояние между ее фокусами равно ...

11. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 1}{4x^2 + 14x^5 + 17}$ равно ...

12. Произведение матриц с размерностями $2 \times 3m$ и $2k \times 3$ возможно при ...

13. Вторая производная функции $f(x) = \sin^2 x$ имеет вид ...

14. Неопределенный интеграл $\int (3x^4 - 5x^2 + 4) dx$ равен ...

15. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & k \\ 4 & 10 & -7 \end{pmatrix}$ не имеет обратной при k , равном ...

16. Значение предела $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4}$ равно ...

17. Производная функции $f(x) = \ln(4x - 7)$ имеет вид ...

18. Неопределенный интеграл $\int x^2 \sin x^3 dx$ равен ...

19. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 5x^3$ в точке $x_0 = -1$, равен ...

20. Определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} dx$ равен ...

21. Вторая производная функции $f(x) = \sin 2x$ имеет вид ...

22. Неопределенный интеграл $\int x^2 \cos x^3 dx$ равен ...

23. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ k & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 22$ при k , равном ...

24. Вторая производная функции $f(x) = \ln(2x - 3)$ имеет вид ...

25. Множество первообразных функции $f(x) = 2e^{3x}$ имеет вид ...

26. Определенный интеграл $\int_1^5 (2x-3) dx$ равен ...
27. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ x+y=1 \end{cases}$, то $x_0 + y_0$ равно ...
28. Даны векторы $\vec{a}=(-1;3;4)$ и $\vec{b}=(1;2;-2)$. Тогда длина вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ равна ...
29. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C=B-2A$ имеет вид ...
30. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6+3x^3-1}{5x^2+12x^6+17}$ равно ...

4. Ключи к оценочным материалам

4.1. Тестовые материалы

Ответы:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| в | в | г | а | б | б | а | в | г | б | б | а | г | б | а | в | а | б | в | б |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| г | в | г | а | г | в | в | а | б | г | б | в | г | б | г | а | в | б | г | б |

4.2. Открытые задания

Ответы:

| | | | |
|---|---|----|--------------------------|
| 1 | -2 | 16 | $\frac{8}{3}$ |
| 2 | 2 | 17 | $\frac{4}{4x-7}$ |
| 3 | $2\cos(2x-1)$ | 18 | $-\frac{1}{3}\cos x^3+C$ |
| 4 | $\frac{2}{3}e^{3x}+C$ | 19 | -21 |
| 5 | 4 | 20 | $\frac{4}{3}$ |
| 6 | $\sqrt{5}$ | 21 | $-4\sin 2x$ |
| 7 | $y=\frac{1}{9}e^{3x}+\frac{5}{2}x^2+C_1x+C_2$ | 22 | $\frac{1}{3}\sin x^3+C$ |
| 8 | -4 | 23 | 1 |
| 9 | $(-2; -2)$ | 24 | $-\frac{4}{(2x-3)^2}$ |

| | | | |
|----|--|----|---|
| 10 | $4\sqrt{5}$ | 25 | $\frac{2}{3}e^{3x} + C$ |
| 11 | $\frac{3}{7}$ | 26 | 12 |
| 12 | $m = 2, k = 3$ | 27 | 3 |
| 13 | $2\cos 2x$ | 28 | $5\sqrt{5}$ |
| 14 | $\frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + C$ | 29 | $\begin{pmatrix} -13 & -12 \\ -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 15 | -3 | 30 | $\frac{1}{6}$ |